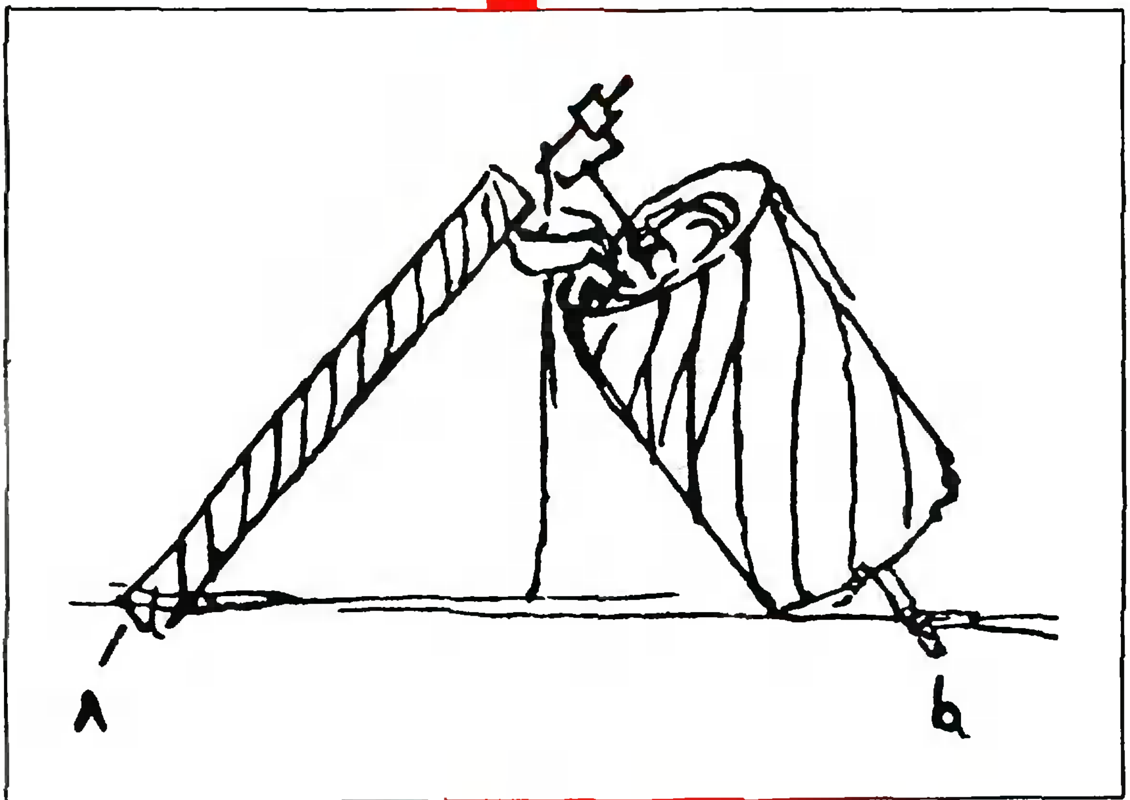
ISSN 0130-2221

Квант

Научно-популярный физико-математический журнал

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12



Перпетуум-мобиле и математика

1991

Квант

6 1991

Выходит с января 1970 года

Ежемесячный
научно-популярный
физико-математический
журнал

Учредители —
Президиум
Академии наук СССР,
Президиум
Академии педагогических
наук СССР
и трудовой коллектив
редакции журнала «Квант»

Москва, «Наука»,
Главная редакция
физико-математической
литературы

В номере:

ЧТО ТАКОЕ РАЗМЕРНОСТЬ?

Доктор физико-математических наук
В. ТИХОМИРОВ

«Я это вижу, но я не верю в это»

Одна из последних статей великого ученого Анри Пуанкаре (1854—1912), опубликованная в вышедшем уже после его смерти сборнике «Последние мысли», называлась «Почему пространство имеет три измерения?». В этой статье Пуанкаре размышляет над вопросом, что такое число измерений, или что такое размерность.

Когда люди стали задумываться над этим? Точка, линия, поверхность — чем они отличаются друг от друга? Впервые об этом было написано в самых первых строках самой первой из дошедших до нас книг по математике — в «Началах» Евклида (IV—III вв. до н. э.)*). Вот они, эти первые строки.

«Определения

1. Точка есть то, что не имеет частей. 2. Линия же — протяженность без ширины. 3. Концы же линии — точки. 4. Поверхность есть то, что имеет только длину и ширину. 5. Концы же поверхности — линии.»

У многих эти слова способны вызвать улыбку: так они не похожи на то, что сейчас принято называть определениями, но здесь заложена попытка осмыслить важнейшие понятия, и мы увидим, сколь глубоки связи первых слов книги Евклида с «Последними мыслями» Пуанкаре. Но обо всем — по порядку. Мы начнем сейчас с гораздо более позднего времени, чем третий век до нашей эры. Исходная точка нашего путешествия — Германия, семидесятые годы прошлого века. Молодой математик — Георг Кантор (1845—1918) — пытается доказать, что в квадрате «больше» точек, чем в отрезке. Но в итоге он внезапно приходит к столь неожиданному результату, что пишет своему коллеге с некоторой растерянностью: «Я это вижу, но я не верю в это».

О каком же математическом факте шла здесь речь?

Размерность — это количество?

Пусть заданы два множества. Когда можно сказать, что в одном из них столько же точек, сколько в другом? Все совершенно очевидно для конечных множеств. Каждое из них можно пересчитать, и если полученные при пересчете числа окажутся одинаковыми, то это и будет означать, что число элементов в двух данных множествах одинаково.

Но для бесконечных множеств все не так просто. Еще Галилей заметил, что квадратов натуральных чисел «столько же», сколько самих натуральных. Действительно, можно выстроить два ряда чисел

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & \ldots & n & \ldots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \\ 1 & 4 & 9 & \ldots & n^2 & \ldots \end{array}$$

так, что каждому натуральному числу (числу в верхнем ряду) соответствует одно и только одно число в нижнем ряду — квадрат числа, стоящего в верхней строчке.

Кантор назвал два множества *равномощными* (или *эквивалентными*), *если между их элементами можно установить взаимно однозначное соответствие* (т. е. такое соответствие, при котором каждому элементу одного множества соответствует один и только один элемент другого и наоборот). Равномощность — это термин, который для конечных множеств означает, что данные множества состоят из одинакового числа элементов, а для бесконечных множеств равномощность по определению означает, что множества одинаковы по «числу» элементов.

*) Этот трактат содержал изложение почти всех математических знаний своего времени.

Равномощные множества естественно объединить в один класс, приписав им то общее, что свойственно всем им. Это свойство, названное Кантором *мощностью* характеризует как бы «число элементов» в любом множестве данного класса. Так, мощность множества, состоящего из n элементов, равна n. Мы уже видели, что бесконечное множество может иметь столько же элементов, сколько имеет его подмножество (это совершенно немыслимо для конечных множеств).

Рассмотрим еще два примера.

Теорема 1. *Множество пар натуральных чисел равномощно множеству всех натуральных чисел.*

Доказательство. Обозначим множество пар натуральных чисел через N^2. Установить взаимооднозначное соответствие между N и N^2 можно многими способами. Вот один из простейших.

Если $n=2^{n_1-1}(2n_2-1)$, то числу n ставится в соответствие пара $(n_1;\ n_2)$. Так как каждое натуральное число единственным образом разлагается в произведение степени двойки и нечетного числа (скажем, $48=2^4\cdot 3$), это соответствие взаимно однозначно и приводит к такому расположению в ряд пар $(n_1;\ n_2)$:

1	2	3	4	5	
↕	↕	↕	↕	↕	
(1; 1)	(2; 1)	(1; 2)	(3; 1)	(1; 3)	

6	7	8	9	10	...
↕	↕	↕	↕	↕	
(2; 2)	(1; 4)	(4; 1)	(1; 5)	(2; 3)	...

При этом каждая пара натуральных чисел $(p;\ q)$ получает номер $n=2^{p-1}(2q-1)$. Например, пара (3; 4) имеет номер $n=28$, пара (1; 50) — номер 99.

Можно поступить иначе. Расположим все пары в таблицу и будем последовательно нумеровать пары, обходя их по стрелкам (при этом, например, пара (2; 3) получит номер 8).[*]

Таблица

	1	2	3	4	5	
1	(1:1)	(1:2)	(1:3)	(1:4)	(1:5)	
2	(2:1)	(2:2)	(2:3)	(2:4)	(2:5)	
3	(3:1)	(3:2)	(3:3)	(3:4)		
4	(4:1)	(4:2)	(4:3)			
5	(5:1)	(5:2)				

Упражнения

1. Задайте описанный способ нумерации пар явной формулой. Какой номер получит при этом пара (99; 100)?

2. Установите взаимно однозначное соответствие между N и множеством всех рациональных чисел.

3. Установите взаимно однозначное соответствие а) между двумя отрезками; б) между отрезком [0; 1] и интервалом (0; 1).

[*] Эта таблица изображена на одном из обелисков, посвященных памяти Кантора.

Докажем теперь, что *множество чисел интервала (0; 1) равномощно всей числовой прямой R.*

В самом деле, функция $y=\operatorname{ctg}\pi x$ каждому $x\in(0;\ 1)$ ставит в соответствие одно и только одно $y\in R$ и наоборот. Еще один пример равномощности множества и его части!

Тут же возникает вопрос, а нельзя ли пересчитать вообще все элементы любого множества так, как мы пересчитали множество N^2? Оказывается, далеко не всегда.

Назовем бесконечное множество A *счетным*, если его можно пересчитать и *несчетным* в противном случае.

Теорема 2 (Кантора). *Интервал (0; 1) несчетен.*

Доказательство. Будем рассуждать от противного. Пусть отрезок можно пересчитать. Запишем каждую точку отрезка в виде десятичной дроби. Такая запись, вообще говоря, неоднозначна (0,1=0,0999...), но она становится однозначной, если условиться, что конечные дроби вида 0,1, 0,25 и т. д. записываются так 0,0 (9) (девять в периоде) 0,24 (9) и т. п., т. е. конечные десятичные дроби записываются через девятки в периоде. Итак, пусть числа из I пересчитаны, т. е. $I=\{x_1, x_2, ...\}$, где

$$x_1=0,x_{11}x_{12}...x_{1n}...,$$
$$x_2=0,x_{21}x_{22}...x_{2n}...,$$
$$...$$

а x_{ij} принимают значения от нуля до девяти и нет чисел, у которых, начиная с какого-то момента, стоят одни нули.

Рассмотрим десятичную дробь $\alpha=0,y_1y_2...$, где $y_i=1$, если $x_{ii}\neq 1$, и $y_i=2$, если $x_{ii}=1$ (этот процесс получил название диагонального из-за того, что мы рассматриваем числа x_{ii} на диагонали и изменяем их). Число α, разумеется, принадлежит I. Если I можно пересчитать, то у α должен быть какой-то номер, скажем, N, т. е. $\alpha=x_N$. Но тогда $\alpha=0, x_{N1}...x_{NN}$, а это не так, ибо по построению, $y_N\neq \bar{x}_{NN}$.

Полученное противоречие и доказывает теорему.

Так, может быть, размерность связана с количеством точек? Ведь, вроде бы, ясно, что в квадрате больше точек, чем в отрезке, в кубе — больше, чем в квадрате. Но нет! Кантор доказывает теорему о том, что количества всех точек в отрезке и в квадрате одинаковы.

Именно по поводу этой теоремы и было сказано: «Я это вижу, но я не верю в это!»

Теорема 3. *Отрезок I и квадрат I^2 равномощны.*

Наметим доказательство этой теоремы. Рассмотрим квадрат I^2, состоящий из точек $(x_1; x_2)$, $0\leqslant x_1\leqslant 1$, $0\leqslant x_2\leqslant 1$. Как и раньше, разложим числа x_1 и x_2 в десятичные дроби, где конечные десятичные дроби записываются через девятки в периоде:

$$x_1=0,\alpha_1...\alpha_n...,$$
$$x_2=0,\beta_1...\beta_n...,$$

и поставим в соответствие паре $(x_1; x_2)$ число

$$y=0,\alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2...\alpha_n\beta_n... \ .$$

При этом разным парам соответствуют разные числа, т. е. множество всех пар эквивалентно некоторому подмножеству отрезка I, и потому мощность I^2 не превосходит мощности отрезка I. С другой стороны, мощность I^2 не меньше мощности I (в квадрате содержится сколько угодно отрезков), так что I и I^2 эквивалентны.

Мы здесь неявно воспользовались утверждением, что мощность подмножества не больше мощности самого множества, и тем, что мощности можно сравнивать.

Упражнения

4. Докажите, что квадрат и круг эквивалентны.

5. Докажите, что отрезок I эквивалентен кубу I^3.

Что же такое размерность?

Так чем же все-таки квадрат отличается от отрезка или от куба? Что означает, что пространство имеет три измерения? Пришла пора вернуться к статье Пуанкаре.

Он пишет: «Что такое протяженность n измерений, чем она отличается от протяженности с числом измерений большим или меньшим? Напомним сперва некоторые результаты, полученные недавно в школе Кантора. Можно установить взаимно однозначное соответствие между точками прямой и плоскости*). Это возможно, пока мы не связываем себя условием, чтобы двум близким точкам прямой соответствовали бы близкие точки плоскости и наоборот».

Из этих слов видно, что Пуанкаре считал невозможным такое отображение $x\to F(x)$, которое отображало бы отрезок I на квадрат и было бы при этом взаимно однозначным и непрерывным в обе стороны (т. е. непрерывно должно быть и само отображение, и обратное к нему). Продолжим цитату.

«Я хочу обосновать определение числа измерений на понятии сечения. Представим себе замкнутую кривую, т. е. протяженность одного измерения. Если на этой кривой отметим какие-либо две точки, через которые запретим переходить, то кривая окажется разрезанной на две части и будет невозможно перейти из одной части в другую, не пересекая заданные точки.

*) Именно об этом и шла речь в теореме 3.

Возьмем, напротив, замкнутую поверхность, образующую протяженность двух измерений. Мы можем поместить на ней одну, две, любое число запретных точек, поверхность от этого не окажется разбитой на части.»

Приведенные здесь слова Пуанкаре составляют содержание следующей теоремы.

Теорема 4. *Не существует взаимно однозначного и непрерывного в обе стороны отображения отрезка на квадрат.*

Доказательство. Пусть такое отображение $\hat{F}$ существует. Рассмотрим в квадрате образы $\hat{F}(0)$, $\hat{F}(1/2)$ и $\hat{F}(1)$ трех точек: 0, 1/2 и 1. Соединим $\hat{F}(0)$ и $\hat{F}(1)$ ломаной, лежащей целиком в квадрате и не проходящей через точку $\hat{F}(1/2)$, что, очевидно, всегда возможно (на рисунке 1 $\hat{F}(0)$ и $\hat{F}(1)$ соединены отрезком). Будем теперь двигаться вдоль этой ломаной от $\hat{F}(0)$ к $\hat{F}(1)$. Нашему пути вдоль ломаной на квадрате соответствует непрерывный путь на отрезке от нуля к единице. Но на этом пути обязательно встретится точка 1/2, а на пути вдоль ломаной (в силу выбора этой ломаной) точка $\hat{F}(1/2)$ не встретится. Мы пришли к противоречию. Теорема доказана.

Пуанкаре далее пишет: «Перейдем теперь к случаю пространства. Его невозможно разделить на несколько частей, ни запрещая переступать через отдельные точки, ни запрещая переступать отдельные линии. Необходимо будет запретить переходы через отдельные поверхности, т. е. определенные сечения двух измерений. Вот почему мы говорим, что пространство имеет три измерения».

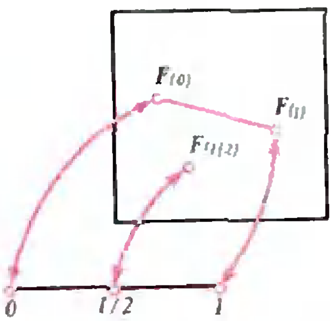


Рис. 1.

Таким образом, Пуанкаре предложил *определять размерность индуктивно*, пользуясь идеей сечения или разбиения.

Эта идея очень проста и естественна. *Два запретительных* знака (в абстракции — две *точки*), расположенные на участке шоссе, не дадут возможности машинам, оказавшимся на данном участке, проследовать ни вперед, ни назад, если только на этом участке нет какого-либо ответвления. Чтобы коровы не разбежались, нужно *построить забор*, т. е. оградить участок поля *линией*, а запретительные знаки здесь не помогут. Чтобы птичка не улетела, нужно оградить ее со всех *сторон клеткой*, которая является моделью *поверхности*, а забор — не помеха. Здесь на «бытовом» уровне мы иллюстрируем мысль Пуанкаре о сечении или о разбиении.

Но ведь в точности та же мысль скрыта и в «определениях» Евклида, не так ли? Давайте взглянем еще раз на эти определения. «Точка есть то, что не имеет частей», т. е. точка не допускает возможность разбиения или сечения. «Линия же — протяженность без ширины.» «Концы же линии — точки», т. е. точки делят линию, секут ее. «Поверхность есть то, что имеет только длину и ширину. Концы же поверхности — линии.» Здесь индуктивный подход к размерности высказан с достаточно полной определенностью.

Все сказанное Пуанкаре относительно различия поверхности и пространства совершенно справедливо. В частности, на этом пути можно доказать аналог теоремы 4, согласно которому не существует взаимно однозначного и непрерывного в обе стороны отображения квадрата на куб.

Вскоре после опубликования «Последних мыслей» была создана *теория размерности*, где размерность определялась индуктивно, т. е. так, как это наметил в своей статье Пуанкаре. Среди создателей теории размерности на базе индуктивного подхода надо назвать прежде всего голландского математика Брауэра, австрийского математика Менгера и (в наибольшей степени) советских математиков Павла Самуиловича Урысона (трагически погибшего в 1924 году в возрасте 26 лет) и Павла Сергеевича Александрова.

Но оказалось, что индуктивный способ определения размерности — не единственный. Возможен еще один совершенно неожиданный подход к ответу на вопрос, почему пространство имеет три измерения. Этот подход связан с именами замечательных математиков XX века — французского математика А. Лебега и уже упомянутого Л. Брауэра.

Теорема Лебега — Брауэра

Предположим, вам нужно разделить большой круглый (или квадратный) участок земли между несколькими арендаторами, причем во избежание скандалов вы хотите, чтобы одновременно друг с другом соседствовали как можно меньше арендаторов. Так, на рисунке 2, *а* соседствуют друг с другом арендаторы *А, Б, В, Г*, на рисунке 2, *б* (кирпичная кладка) попарно соседствуют друг с другом не более чем 3 арендатора. Возникает вопрос, нельзя ли так устроить раздел, чтобы не было трех арендаторов, попарно соседствующих друг с другом?

Заметим, что при аналогичном дележе дороги такой раздел возможен (рис. 3).

Может показаться, что и круглый участок можно разделить нужным образом, порезав его «в лапшу», как на рисунке 4. Но это неудобно — участки слишком длинные.

Пусть для определенности радиус круглого участка равен 1 км, а диаметр (наибольшее расстояние между двумя точками) каждого надела должен быть меньше, скажем, 250 м.

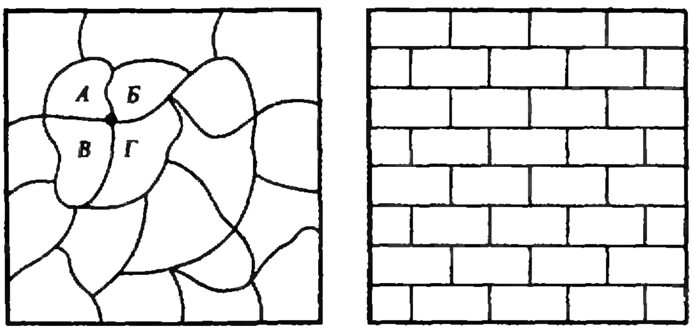
Тогда, как бы вы ни пытались разбить круглый участок на «наделы», обязательно найдутся по крайней мере 3 арендатора, чьи наделы попарно соседствуют, как участки *А, Б, В* на рисунке 2, *а*. Это утверждение и составляет содержание теоремы, впервые доказанной А. Лебегом.

Теорема 5. *При любом разбиении n-мерного куба (шара) на части достаточно малого диаметра найдутся $n+1$ частей, имеющих общую граничную точку. (У нас $n=1, 2, 3$, под n-мерным кубом понимаются, соответственно, отрезок, квадрат и куб.)*

Эта теорема позволяет дать определение размерности.

Определение. *Данное множество A, лежащее на плоскости (или в пространстве), имеет размерность n, если при любом его разбиении на части достаточно малого диаметра найдутся $n+1$ частей, имеющих общую граничную точку, причем для любого $\varepsilon>0$ существует такое разбиение на части с диаметром, меньшим ε, что никакие $n+2$ части не имеют общей граничной точки.*

Из этого определения, рассмотренных примеров и теоремы 5 сразу следует, что размерность отрезка равна 1,



а) б)

Рис. 2.

Рис. 3.

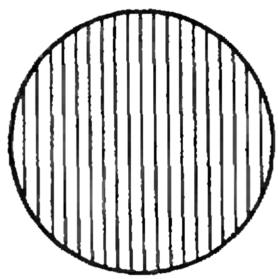


Рис. 4.

размерность квадрата 2, размерность куба 3.

Доказательство теоремы 5, данное Лебегом, содержало пробелы, устранить которые удалось Брауэру с помощью доказанной им удивительной теоремы о неподвижной точке.

Теорема 6. *При непрерывном отображении круга в себя имеется неподвижная точка**).

Поясним это. Представьте себе, что вы позвали к себе гостей, а они предались такой забаве. С круглого стола, целиком покрытого хорошо растягивающейся скатертью, ваши гости сорвали скатерть и начали ее растягивать, сжимать, складывать и, наконец, бросили назад на стол, где скомканный, где смятый, где сжатый, где растянутый кусок материала, который прежде был вашей скатертью. Тогда (утверждает теорема Брауэра), если этот кусок нигде не был порван и целиком уместился на столе, хотя бы одна точка скатерти не изменила своего положения.

Собственно говоря, нам понадобится даже не сама теорема Брауэра, а такое следствие из нее. Допустим, что после того безобразия, которое учинили со скатертью ваши гости, вы выкинули старую скатерть и на середину стола постелили маленькую круглую салфеточку — с центром в центре стола. Но снова гости разбушевались и стали тянуть салфетку в разные стороны (а также складывать ее, сжимать и т. п., не разрывая ее). Тогда, если никакая точка салфетки не сдвинулась на величину, бо́льшую половины ее радиуса, можно быть уверенным, что центр стола оказался покрытым тем, что ранее было вашей бедной салфеткой. И не только центр, но и любая точка, отстоящая от центра менее чем на половину радиуса салфетки.

В это утверждение легко поверить и так, но совсем просто вывести его из теоремы Брауэра. Действительно пусть наша салфетка — это круг единичного радиуса и по воле гостей каждой точке X этого круга непрерывно ставится в соответствие точка плоскости $F(x)$ так, что длина отрезка $[X;\ F(x)]$ меньше $1/2$. Предположим, что некоторая точка x_0, находящаяся от центра круга на расстоянии, меньшем чем $1/2$, не оказалась покрытой, т. е. для всякого x выполнено соотношение $F(x)\neq X_0$. Тогда мы построим следующее непрерывное отображение нашего круга: точке X мы сопоставим точку $G(x)$ на границе круга так, чтобы точка X_0 лежала внутри отрезка $[F(x);\ G(x)]$ (рис. 5). Можно доказать, что такое отображение действительно непрерывно (и даже дать явную формулу для $G(x)$). Из построения следует, разумеется, что расстояние от $F(x)$ до $G(x)$ больше $1/2$. Но, с другой стороны, ясно, что никакая точка круга при отображении $X\to G(\bar{x})$ не может быть неподвижной, ибо неподвижная точка $\bar{x}$ должна была бы лежать на граничной окружности и тогда, по построению, расстояние от $\bar{x}$ до $F(\bar{x})$ (а это то же самое, что расстояние от $G(\bar{x})$ до $F(\bar{x})$ (ибо $\bar{x}=G(\bar{x})$) было бы больше $1/2$, что противоречит основному допущению. Но такого непрерывного отображения единичного круга в себя, согласно теореме Брауэра, не бывает. Следствие доказано.

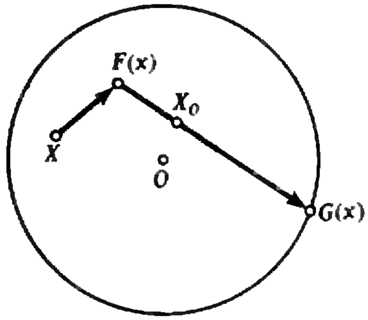


Рис. 5.

А теперь пора перейти к доказательству самой теоремы Лебега — Брауэра, т. е. к объяснению того, что размерность круга равна двум.

Ясно, что размерность круга не больше двух, ибо «кирпичной кладкой» можно разбить любой круг на сколь угодно мелкие части так, что они будут пересекаться не более, чем по трое. Таким образом, осталось доказать, что размерность круга не равна единице.

*) Мы не будем доказывать эту теорему.

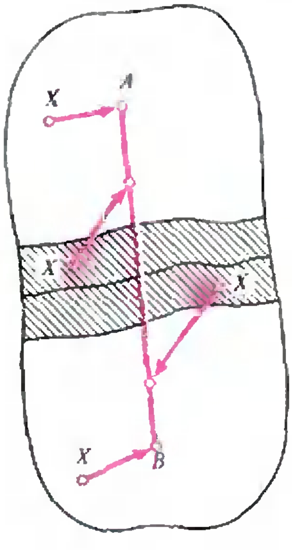
Предположим, что она все-таки равна единице. Представьте себя тогда в роли председателя дачного кооператива, которому выделили круглый участок земли (радиусом, скажем, в один километр), и вам надо нарезать участки пайщикам. Не исключено, что узнав, что размерность круга равна единице, вы бы очень обрадовались: ведь это означало бы, что можно нарезать участки так, что никакие три пайщика не были бы одновременно соседями друг с другом и все соседствовали бы лишь по двое. Разве это не здорово: меньше поводов для споров и разногласий!

Увы, такое оказывается невозможным, если только потребовать, чтобы диаметр каждого участка был достаточно мал, скажем, не больше 250 м. Именно это мы и докажем.

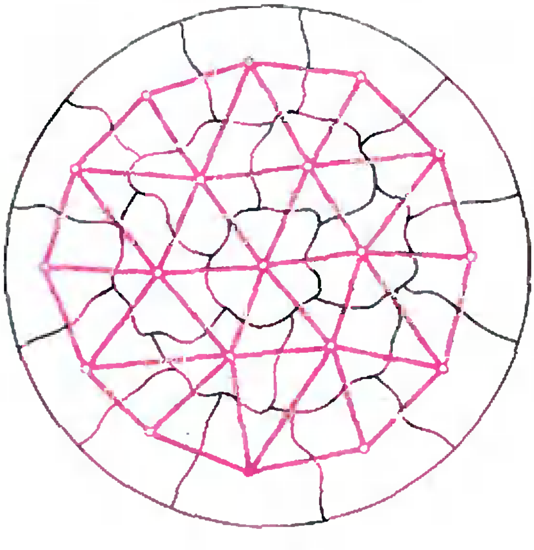
Пусть где-то имеются два участка, принадлежащие соседям — Андрею и Борису. Оба они — цивилизованные люди и потому не разделили свои территории забором, а от межи, разделяющей по закону их участки, несколько отступили каждый в свою сторону, провели новые межи и территорию между ними объявили общей (см. рис. 6, *а*). Следующее простое построение является эпицентром всего доказательства. Выберем на участке Андрея какую-нибудь точку и обозначим ее буквой A, а на участке Бориса выберем точку B. Построим теперь отображение обоих участков (и Андрея, и Бориса) на отрезок AB по следующему правилу. Если какая-то точка лежит на участке Андрея и не является общей, она отображается в A, аналогично — необщая точка территории Бориса отображается в B. Если же точка X — «общая», то ей ставится в соответствие точка отрезка AB, делящая этот отрезок в отношении $d(X, A):d(X, B)$, где $d(X, A)$ — расстояние от X до андреевского участка, а $d(X, B)$ — расстояние от X до участка Бориса.

И вот мы почти у цели. Допустим, нам удалось разделить тот круглый участок километрового радиуса так, что участки соседствуют лишь попарно и диаметры участков меньше 250 м.

Возьмем на каждом из участков по точке — пусть это будут точки $A_1, A_2, \ldots, A_s$ (на рисунке 6, *б* это вершины красных треугольников) — и для любых двух соседних участков построим последовательно такие же отображения, которые только что осуществили для участков Андрея и Бориса. Необходимо только позаботиться о том, чтобы не появилось точек, общих для трех соседей,— для этого «отступления» от граничных межей



а)



б)

Рис. 6.

при выделении общей территории должны быть достаточно малыми*).

Из построения ясно, что любая точка сдвинется не больше чем на 500 м (докажите это!) и весь большой круглый участок радиусом в километр отобразится в некоторый набор отрезков $[A_i; A_j]$. Этим набором отрезков нельзя, разумеется, покрыть никакого круга, а ведь по следствию из теоремы Брауэра мы должны были бы покрыть целый круг радиусом в 500 м. Мы пришли к противоречию. Значит, размерность круга равна двум.

Так завершается доказательство теоремы Лебега — Брауэра для $n=2$. Случай $n=3$ — аналогичен.

Упражнение 6. Продумайте сами и получите ответ на вопрос, поставленный Пуанкаре: почему пространство имеет три измерения?

В заключение осталось сказать немногое. Центральное место в рассуждении — построение непрерывного отображения двух областей на отрезок — является духовной собственностью Павла Сергеевича Александрова. Своей всемирной известностью и своим положением признанного лидера советских топологов, которое он занимал несколько десятилетий, П. С. Александров обязан, в значительной мере, внезапному озарению, которое снизошло на него (по его словам, во время продумывания некоей конструкции Пуанкаре) и привело к построению, зерно которого мы воспроизвели. С помощью этого построения удалось очень многое понять, и в частности, как мы видим, доказать теорему Лебега — Брауэра.

А мне показалась заманчивой идея в краткой и непринужденной беседе рассказать вам о сюжете, имеющем не только математическое, но и общекультурное значение, о решении проблемы, занимавшей ученых на протяжении двадцати трех веков, о том вкладе, который внесли в это решение Евклид, Кантор, Лебег, Брауэр и Александров, о том вопросе, над которым напряженно думал в последние годы своей жизни Анри Пуанкаре.

*) Построенная система отрезков называется «нервом» покрытия $U_1, U_2, ..., U_n$. Такая конструкция играет очень важную роль в топологии.

ЭЛЕКТРЕТЫ — ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ АНАЛОГИ МАГНИТОВ

Доктор технических наук
Г. ЕФАШКИН

Магниты в виде кусков железной руды часто встречаются в природе и известны с очень давних времен. Когда была обнаружена связь между магнитными и электрическими явлениями, возник вопрос: а нельзя ли получить электрический аналог магнита — диэлектрик, который создавал бы электрическое поле? Такое предположение высказал английский физик О. Хевисайд в 1892 году. Он же предложил название аналогу магнита — «электрет».

В природе в естественном состоянии электреты не встречаются. Может быть, можно получить электрет искусственно, как получают искусственные магниты? Намагничивание магнитного материала (магнетика) производят помещая его во внешнее магнитное поле. Можно попробовать получить электрет аналогичным способом, помещая диэлектрик во внешнее электрическое поле.

Дело оказалось сложнее. Лишь в 1922 году, через тридцать лет после теоретического предположения Хевисайда, Мототоро Ёгучи в Японии удалось получить первые электреты. Ёгучи помещал смесь пальмовой смолы с канифолью (карнаубский воск) между двумя металлическими электродами, расплавлял смесь, включал напряжение и, не снимая напряжения, охлаждал ее. Получалась пластинка диэлектрика, которая создавала внешнее электрическое поле,— электрет.

Вскоре после этого был создан первый микрофон на электретах. Конструкция микрофона была предельно проста. Электрет помещали между двумя электродами, один из которых плотно прижимали, а второй, играющий роль мембраны,— располагали с небольшим зазором. Микрофон работал без источника питания. Это производило впечатление чуда. На самом деле при вибрации мембраны менялось электрическое поле между электродами, и во внешней цепи генерировался ток. Электрет непосредственно преобразовывал энергию звука в электрический ток.

Почему же такие простые микрофоны не получили широкого распространения? Как говорят конструкторы, карнаубский воск был нетехнологичным материалом — расплавлялся при низкой температуре, был непрочным.

Но идея была хороша. Поэтому начались поиски технологичного электретного материала. В 50-е годы в Физическом институте Академии наук СССР Г. И. Сканави и А. Н. Губкин получили прочную керамику с хорошими электретными свойствами — титанат кальция — и сконструировали микрофон на керамическом электрете.

В 60-е годы был открыт электретный эффект в тонких полимерных пленках лавсана, фторопласта, поликарбоната. Практическое применение электретов стало быстро развиваться.

Параллельно с поисками новых электретных материалов ученые работали над теорией электретного состояния диэлектриков. Советский ученый профессор А. Н. Губкин создал феноменологическую теорию электретов, которая в настоящее время признана во всем мире.

Магниты и электреты: сходство и различие

Магниты давно привлекали внимание человека. Но понимание природы магнитов возникло только после того, как в начале прошлого века обнаружили, что магнитное поле создается движущимися зарядами (токами). Магнитные свойства вещества Ампер объяснил замкнутыми электрическими токами внутри вещества. Согласно гипотезе Ампера, внутри атомов и молекул циркулируют элементарные электрические токи (движение электронов в атомах). В намагниченном состоянии элементарные токи в теле ориентированы так, что их действия складываются.

Магнитные свойства вещества характеризуются магнитной проницаемостью μ. Огромной магнитной проницаемостью обладают ферромагнетики (железо, кобальт и др.), магнитные поля которых создаются не движением электронов вокруг ядер, а вследствие свойства электрона создавать магнитное поле «собственного вращения» (спина).

Теория ферромагнетизма была разработана французским физиком П. Вейсом, советским ученым Я. И. Френкелем и немецким ученым В. Гейзенбергом. По Вейсу, ферромагнетик имеет макроскопические области микронных размеров — домены, которые самопроизвольно намагничены до насыщения (все спины внутри домена ориентированы в одном направлении). Если внешнего поля нет, домены ориентированы хаотически, их поля компенсируют друг друга, и ферромагнетик не намагничен. При включении внешнего поля домены ориентируются по полю, и ферромагнетик намагничивается (в действительности процесс намагничивания имеет более сложный характер).

Очень эффектен опыт, который подтверждает доменную структуру ферромагнетиков. Если на ферромагнитный сердечник, намагничивающийся в поле катушки, надеть другую катушку и соединить с громкоговорителем, то при включении намагничивающей катушки домены, ориентируясь в магнитном поле, производят сильный шорох, слышный на всю аудиторию.

Области спонтанной (самопроизвольной) намагниченности можно увидеть под микроскопом, если на отполированную поверхность ферромагнетика нанести мелкий порошок магнетика. Частицы порошка, ориентируясь в магнитном поле доменов, проявляют форму доменов.

Диэлектрики стали изучать значительно позже. Термин «диэлектрик» ввел Фарадей в 1839 году, и, по существу, с этого же времени началось систематическое изучение диэлектриков.

При этом использовалась аналогия между магнитными и электрическими явлениями. Аналог ферромагнетика — сегнетоэлектрик — был открыт в 1918 году. Как и в ферромагнетике, в сегнетоэлектрике имеются домены — области спонтанной поляризации (электрические диполи домена ориентированы в одном направлении). Под действием внешнего поля домены ориентируются, и диэлектрик поляризуется. Отметим важную особенность магнитов, отличающую их от электретов: полюса магнита, в том числе и на молекулярном уровне, неразделимы. Иначе говоря, магнитных зарядов (так называемых магнитных монополей) не существует. Этим, в частности, объясняется устойчивость естественных магнитов.

Модель электрета в приближении плоского конденсатора

В диэлектриках положительные и отрицательные заряды находятся в основном в связанном состоянии, например входят в состав полярных молекул (каждая такая молекула образует электрический диполь); однако диэлектрик может содержать и несвязанные, свободные заряды.

Если внешнего поля нет, диэлектрик неполяризован, диполи и свободные заряды разбросаны хаотически, диэлектрик собственного поля не имеет.

Если диэлектрик поместить в электрическое поле, диполи ориентируются по полю. Так как молекулярных диполей очень много, то при их ориентации «плюсы» и «минусы» соседних диполей внутри диэлектрика компенсируют друг друга. Нескомпенсированными остаются только поверхностные заряды. Диэлектрик поляризуется. На одной поверхности выступают заряды одного знака, на другой — противоположного. Свободные заряды во внешнем поле двигаются (дрейфуют) и также разделяются.

Ориентация диполей и дрейф свободных зарядов протекают во времени. Если процесс происходит быстро, за очень короткий промежуток времени (миллионные доли секунды), поляризация называется мгновенной. Медленная поляризация (время поляризации исчисляется минутами, часами, сутками и даже годами) называется релаксационной. Для характеристики процесса поляризации вводится понятие времени релаксации.

Релаксационную поляризацию можно представить себе так, как будто диполи диэлектрика медленно поворачиваются в вязкой жидкости. Время релаксации очень сильно зависит от температуры, и если нагреть диэлектрик, то вязкость «жидкости» снижается, диполи поворачиваются значительно быстрее.

Знак поверхностного заряда при ориентировании диполей противоположен знаку поляризующего электрода. Плюсы диполей притягиваются к минусу электрода. Поэтому такие поверхностные заряды назвали гетерозарядами (от греческого слова heteros — другой).

С электрода на поверхность диэлектрика могут «натекать» (инжектироваться) заряды, знак которых одинаков со знаком электрода. Такие заряды назвали гомозарядами (от слова homos — одинаковый).

При релаксационной поляризации, если внешнее поле выключить, тепловое движение не сразу разбросает молекулы. Деполяризация диэлектрика происходит также медленно. Диэлектрик остается некоторое время заполяризованным. Возникает остаточная поляризация.

Поместим электретный материал между двумя прижатыми к материалу электродами и подадим на них напряжение U_0; тогда между электродами возникнет поле $E_0=U_0/d$. В поле происходит релаксационная поляризация диполей и формируется поверхностный гетерозаряд, плотность которого $\sigma_{\text{гетеро}}$ (рис. 1). На рисунке диполи изображены в виде удлиненных прямоугольников. На поверхность электретного материала с электродов инжектируются гомозаряды. Они на рисунке изображены кружками. Плотность гомозарядов $\sigma_{\text{гомо}}$. Плотности гетеро- и гомозарядов неодинаковы. Суммарная плотность заряда равна $\sigma_{\text{сум}}=\sigma_{\text{гетеро}}-\sigma_{\text{гомо}}$.

Отключим напряжение, снимем внешнее поле, уберем электроды. Мы получили электрет. При поляризации электретного материала заряды разделились, на одной поверхности выступили положительные заряды, на другой — отрицательные. По аналогии с магнитами сформировались «северный» и «южный» полюсы.

Рассмотрим свободный (без электродов) электрет. Электрическое поле электрета создается разностью гомо- и гетерозарядов. Часть гетерозарядов скомпенсирована гомозарядами. Представим, что на поверхностях находится только избыточный заряд (рис. 2). Картинка знакомая. Ведь это плоский конденсатор. Отличие в том, что в плоском конденсаторе заряд находится на металлических обкладках и он свободен, т. е. легко может стечь с металла. А электретный заряд связан. Однако поля, создаваемые плоским конденсатором и электретом, подчиняются одним и тем же законам.

В этом случае говорят, что электрет рассматривается в приближении плоского конденсатора. Известно, что поле плоского конденсатора сосредоточено внутри конденсатора. Внешнее поле имеется только у краев. Следовательно, в этом приближении у электрета имеется только внутреннее поле. Если рассчитать внутреннее поле электрета, то оно окажется очень сильным. При реальной плотности заряда $\sigma=10^{-4}$ Кл/м^2 $E=10^7$ В/м.

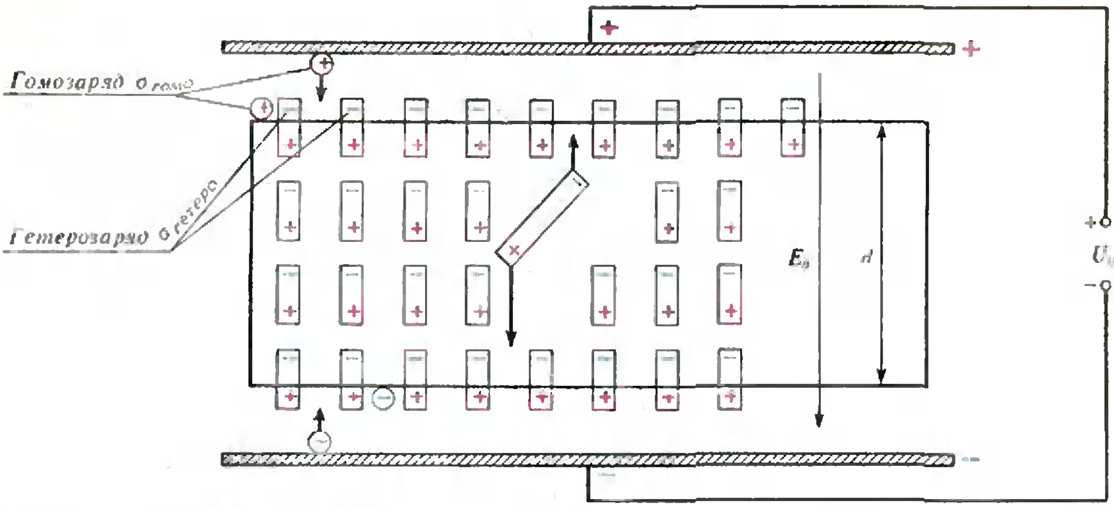


Рис. 1. Формирование электрета.

За счет натекания зарядов извне и медленного дрейфа имеющихся в диэлектрике несвязанных зарядов, а также хаотического теплового движения происходит медленная деполяризация электрета. Время жизни электрета во многом зависит от проводимости диэлектрика. Чем ниже проводимость, тем больше время релаксации, тем стабильнее электрет. По этой причине диполи сегнетоэлектрика довольно быстро экранируются свободными зарядами. Электреты из сегнетоэлектрика обладают малым временем жизни.

Теоретически электретными свойствами обладают все диэлектрики, но время жизни большинства из них очень мало́ — секунды или, в лучшем случае, часы. И лишь некоторые диэлектрики (керамика из титаната кальция, пленки фторопласта, поликарбоната, лавсана, а также полиметилметакрилат плексиглас) длительное время — месяцы, годы и даже десятки лет — сохраняют электретное состояние.*)

Как получают электреты

Первый способ получения электретов уже описан. Электретный материал помещают между электродами, нагревают, чтобы существенно уменьшить время релаксации, выдерживают под напряжением (10—20 кВ), не снимая напряжения охлаждают, потом снимают напряжение и извлекают электрет. Такие электреты назвали термоэлектретами. Но позже выяснилось, что электреты можно получить и другими способами, лишь бы электретный материал подвергался действию электрического поля. Если диэлектрик несет *избыточный заряд*, то материал диэлектрика находится в собственном электрическом поле и поляризуется. Поэтому, если потереть диэлектрик, появятся избыточные заряды, возникнет электрическое поле, и диэлектрик сам себя заполяризует. Такие электреты получили название трибоэлектретов («трибо» по-гречески — натирать). Это простейший способ получения электретов.

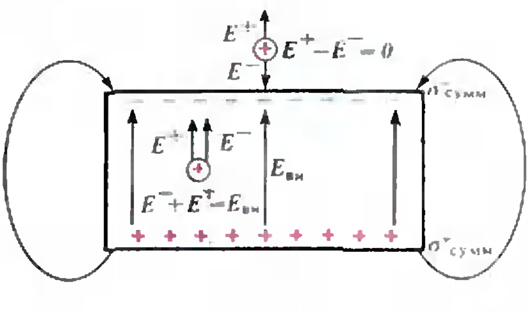


Рис. 2. Приближение плоского конденсатора.

*) Тем, кто заинтересуется теорией электретов, рекомендуем прочитать книгу А. Н. Губкина «Электреты» (М.: Наука, 1978).

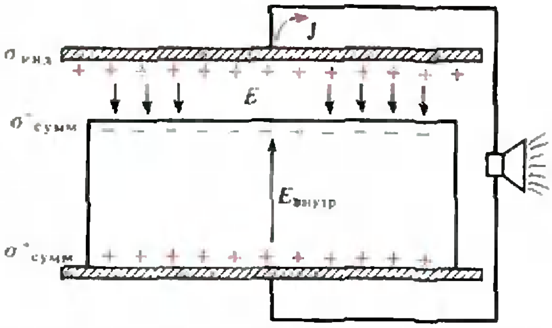


Рис. 3. Закороченный электрет.

Можно облучить диэлектрик электронами или ионами и получить радиоэлектрет (от слова «радиация»). В поле коронного разряда образуются короноэлектреты. Если поля возникают под действием механических напряжений — механоэлектреты. Электроэлектрет формируется в поле без нагрева.

Как же использовать электрет для практических целей? Для этого электрет опять помещают между двумя электродами, которые соединены между собой цепью. Как говорят, электрет закорачивают. Но если нижний электрод прижат к электрету, то верхний располагают с зазором. Тогда на металлическом электроде возникают индуцированные заряды (рис. 3), и в зазоре «электрет — электрод» появляется рабочее поле E.

Если пластинка верхнего электрода вибрирует, меняет свое положение, то поле тоже меняется, соответственно меняется величина индуцированного заряда, а так как на электроде заряды свободны, то они или стекают с электрода, или натекают на него; в цепи генерируется ток. Электрет преобразует внешнюю механическую энергию колебаний электрода в электрическую.

Так применяют на практике принцип закороченного электрета. Многие зарубежные фирмы выпускают радиоаппаратуру с микрофонами на электретах. В Советском Союзе в Туле завод «Октава» выпускает около двадцати модификаций высококачественных электретных микрофонов, среди которых привлекают внимание миниатюрные микрофоны для слуховых аппаратов.

На том же принципе работают электретные устройства для измерения вибраций, числа оборотов (тахометры), генераторы переменного тока, датчики давления. С помощью электретов можно управлять электронным лучом, измерять проникающую радиацию, влажность воздуха, можно сделать измерительную аппаратуру для измерения зарядов и потенциалов электростатического поля, сконструировать фокусирующие и сортирующие системы.

Но, наверное, читателю хотелось бы увидеть электрет или сделать его самостоятельно. В Приложении к статье (в следующем номере журнала) рассказывается, как самому сделать электрет и изготовить простейший наушник.

Модель электрета с дискретным поверхностным зарядом (о вреде стереотипов)

В приближении плоского конденсатора предполагалось, что заряд распределен равномерно по поверхности электрета. К этому настолько привыкли, что понятие равномерного распределения стало стереотипом. Стереотип — привычное представление человека о *явлении. Стереотипы очень* трудно преодолеваются, мешают правильно оценивать явления.

Стереотип «равномерное распределение» мешал объяснить отказы в работе устройств на электретах или их нестабильность. Когда стало ясно, что причина отказов — неравномерное распределение зарядов, то долго считали, что неравномерность возникает случайно, из-за технических дефектов.

«Наверное, технология несовершенна»,— говорили производственники. «Ничего, через некоторое время заряд растечется по поверхности равномерно,— говорили ученые.— Ведь на плоском металлическом конденсаторе заряд всегда распределен равномерно».

И те и другие усердно улучшали технологию: тщательно полировали электроды, ставили охранные кольца, чтобы поляризующее поле сделать равномерным, придумывали необыкновенные электроды в виде проводящей жидкости и т. д. А заряд упорно «не желал» распределяться равномерно. Более того, на полированном электроде распределение заряда получалось более неоднородным, чем на неполированном.

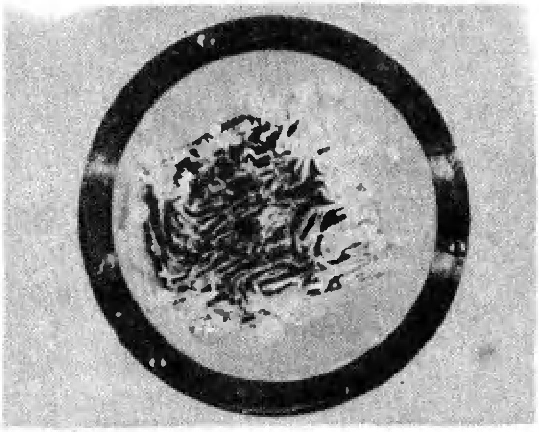
Распределение заряда можно наглядно увидеть, если посыпать поверхность электрета *порошком, который* применяют при копировании текста или документов,— ксеропорошком. Там, где заряд больше, осядет больше порошка, и поверхность будет черной. Поэтому метод проявления заряда был назван ксерографическим методом.

Для примера приводим две фотографии проявленного «рельефа» заряда электрета (рис. 4). Любопытные картинки, не правда ли?

Работа по получению как можно более равномерного распределения заряда продолжалась. Заметив, что шероховатые электроды дают более равномерное распределение, решили в качестве электрода использовать очень мелкую сетку — ее ячейки видны только под микроскопом.

Распределение заряда по поверхности изучили под микроскопом. Оказалось, что области «равномерного» распределения (на фотографиях — совершенно черные области) представляют собой плотно расположенные черные пятнышки овальной формы. В Институте кристаллографии АН СССР в лаборатории поверхностных явлений под руководством профессора Г. И. Дистлера с помощью очень тонкого метода декорирования посмотрели зарядовую топографию поверхности электрета под электронным микроскопом. Маленькие зарядовые пятна вновь распадались уже на скопления точечных дефектов почти круглой формы. Ученые сформулировали это так: «Существование скоплений *точечных дефектов являет*ся правилом, а не исключением...»

Иначе говоря, неравномерное распределение заряда по поверхности закладывается уже на молекулярном уровне и является закономерным.



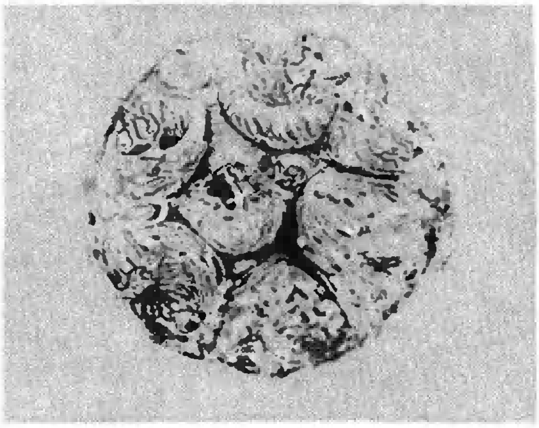


Рис. 4. Распределение заряда по поверхности электрета.

И вот тогда возник на первый взгляд странный вопрос: а что назвать «равномерным» распределением? И как количественно оценить «неравномерное» распределение?

Мы говорим: «Земля круглая». А разве она круглая? На Земле существуют горы, огромные впадины. Мы говорим: «Отполированная поверхность — гладкая». А под микроскопом поверхность — шероховатая. В зависимости от высоты шероховатостей различают 14 классов чистоты поверхности. Понятия «равномерное», «круглая», «гладкая» являются относительными.

Автор данной статьи предложил физическую модель электрета с дискретным поверхностным зарядом. За-

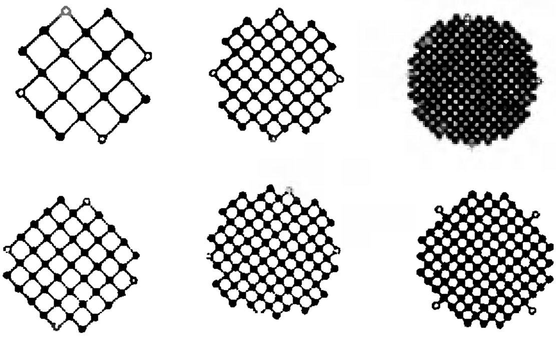


Рис. 5. Схема расположения зарядовых пятен на поверхности электрета.

ряд электрета в принципе дискретен. Неоднородности заряда начинаются с атомарного уровня. Электрические поля дискретных зарядов неоднородны, и если заряды расположены регулярно, как в кристаллической решетке, то поля периодичны. Если удаляться от поверхности, то периодичность сглаживается. Поля усредняются, и довольно быстро поле становится однородным. Как в телевизионном изображении: если рассматривать его вблизи, мы видим систему точек разной яркости, а издалека видна плавно меняющаяся окраска изображения.

Размер тонкого приповерхностного слоя (ТП-слой), в пределах которого различима дискретность заряда и неоднородность поля, является количественным критерием понятий «однородное» и «неоднородное» распределение.

Так, для элементарных зарядов, расположенных регулярно (плоскость кристаллической решетки), ТП-слой составляет всего 3Å($1 Å = 10^{-10}$ м). Если рассматривать электрет с расстояния, большего 3Å, то можно считать, что заряды распределены равномерно, а поле однородно.

Модель не противоречила принятому ранее приближению плоского конденсатора. Действительно, можно считать, что поле за пределами тонкого приповерхностного слоя равно нулю, как для плоского конденсатора.

Предложенная модель включает в себя приближение плоского конденсатора как частный случай.

Электрет «охотно» поляризовался в виде системы круглых зарядовых пятен. Расчеты показали, что при круглых зарядовых пятнах ТП-слой составляет порядка трех радиусов пятен.

Приповерхностные поля могут быть очень сильными, и их можно использовать для практических целей. Регулируя размеры и шаг пятен, можно формировать требуемые величины полей (рис. 5). Электрет, показанный на рисунке, получил название электрета с искусственной дискретной структурой заряда (ИДС-структурой).

Из модели электрета с дискретным поверхностным зарядом, как из рога изобилия, посыпались принципиально новые возможности применения приповерхностных полей электретов.

(Окончание следует)

Вниманию наших читателей!

Мы получаем много писем от наших читателей с вопросом, почему журнал в некоторых городах поступает подписчикам с большим опозданием. Не связано ли это с отсутствием бумаги?

Спешим заверить читателя, что причина в другом. По договору между редакцией, типографией и ЦРПА «Союзпечать» весь тираж «Кванта» должен поступать в ЦРПА в первых числах подписного месяца. Свои обязательства перед типографией редакция выполняет аккуратно. Небольшая задержка (5—10 дней) бывает у типографии. Все остальное на совести Министерства связи, которое, увеличив резко стоимость доставки, посчитало, очевидно, свои функции исчерпанными.

Мы выражаем свое сожаление подписчикам и надеемся, что это явление все же временное. Во всяком случае, причина опоздания нами названа и подписчик может требовать от Министерства связи выполнения обязательств...

Редакция

ПЕРПЕТУУМ-МОБИЛЕ И МАТЕМАТИКА

Кандидат физико-математических наук
А. САВИН

Слова «вечный двигатель» (по-латыни «перпетуум-мобиле») мы связываем с машиной наподобие той, что изображена на рисунке 1: колесо с катящимися внутри него шарами, которое по мысли изобретателя не только само бесконечно долго крутится, но и приводит в движение другие машины, станки. Но со школьной парты мы твердо знаем, что подобная машина не может работать, поскольку это противоречило бы закону сохранения энергии. Правда, в академии наук стран всего мира ежегодно приходят сотни новых (и не новых) проектов таких машин. Физики их называют вечными двигателями первого рода. Значит, есть и вечные двигатели второго рода? Да. О них мы и поговорим.

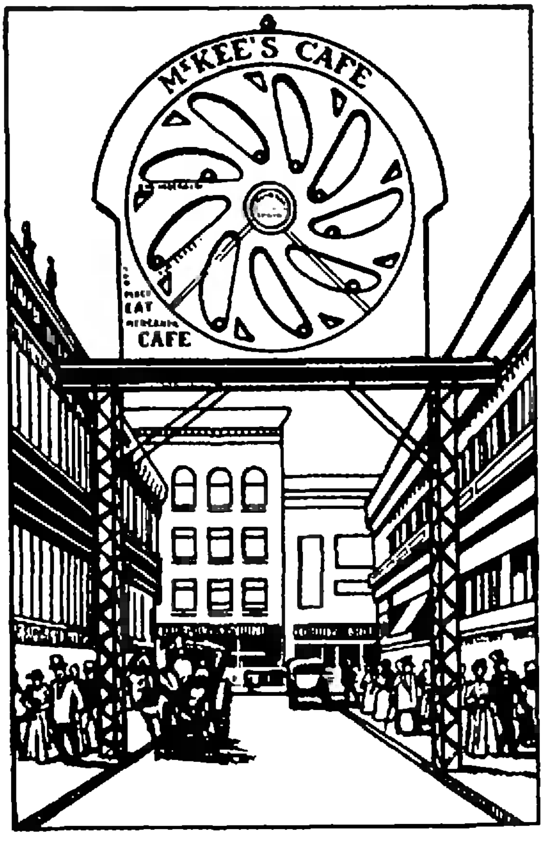


Рис. 1.

Идея вечного двигателя второго рода состоит в том, чтобы, имея два одинаково нагретых тела, передать часть тепла от одного из них другому без затраты энергии, а потом получить энергию движения с помощью тепловых машин, использующих возникшую разность температур. В результате работы тепловой машины температуры тел снова выравниваются. Теперь снова передаем тепло от одного тела другому, получаем работу — и так далее до бесконечности. Вечный двигатель второго рода не противоречит закону сохранения энергии. Здесь энергия не исчезает и не появляется, а лишь переходит сначала от одного тела к другому, а потом тратится на работу тепловой машины, производящей полезную работу. При этом температура обоих тел становится меньше, чем первоначально, но эта потеря тепла может компенсироваться нагреванием от тепла окружающей среды.

Однако осуществлению вечных двигателей второго рода мешает уже другой закон. Его идеи были заложены в работах замечательного французского физика Сади Карно, сына выдающегося деятеля Великой французской революции, известного математика Лазаря Карно, и развиты в работах английского физика У. Томпсона и немецкого физика Р. Клаузиуса. Этот закон носит название «второй закон термодинамики» и звучит так:

Нельзя без затраты энергии передать часть тепла от одного тела другому, если температура первого тела не превосходит температуры второго.

Этот запрет выглядит не очень убедительно. Всегда ли он верен? Великий английский физик Дж. Максвелл высказал идею, призванную опровергнуть этот запрет. Она получила название «демон Максвелла». Давайте, говорит он, возьмем ящик с газом, разделим его пополам перегородкой, около которой будет сидеть демон и пропускать за перегородку, из левой половины в правую, только быстрые молекулы газа, а медленные оставлять в левой. Поскольку температура газа характеризуется средней скоростью его молекул, то в правой половине ящика газ будет нагреваться, а в левой — остывать. Было предложено несколько конструкций, которые, по мысли авторов, должны были сыграть роль такого демона, но в них обнаруживались неучтенные эффекты, в силу которых конструкции не работали.

Там, где пасуют физики, бывает, добиваются успеха математики. Я вам предлагаю устройство, свободное от демонов и прочей нечистой силы, которое можно изготовить даже в школьной мастерской. Оно, согласно расчетам, способно передавать тепло от одного тела другому в том случае, если первоначально тела были нагреты до одинаковой температуры.

Прежде чем приступить к описанию нашего вечного двигателя, необходимо проглотить некоторую дозу математики, чтобы вы сами смогли убедиться в правильности дальнейших рассуждений и построений. Речь пойдет об эллипсе и его свойствах.

Эллипсом называется кривая, состоящая из всех точек плоскости, сумма расстояний от которых до двух заданных точек F_1 и F_2 (они называются фокусами эллипса) есть постоянная величина. Обычно она обозначается через $2a$. Это свойство эллипса используют садовники при разметке овальных клумб. Они втыкают в землю две палки (в фокусах эллипса), к ним привязывают концы веревки, затем берут еще одну палку с острым концом и с ее помощью натягивают веревку (рис. 2).

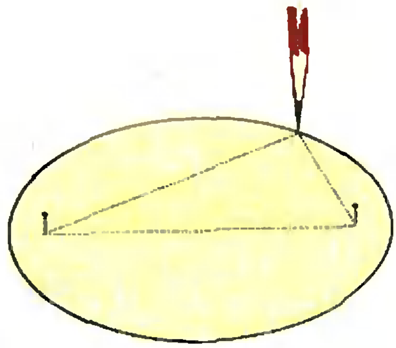


Рис. 2.

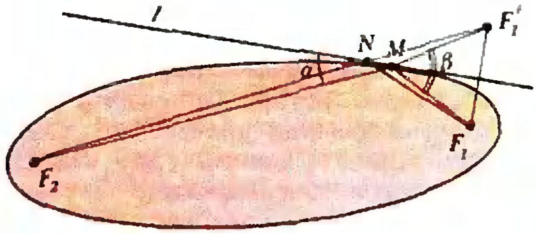


Рис. 3.

Если теперь передвигать эту палку, оставляя веревку натянутой, то ее острый конец будет вычерчивать на земле эллипс. Его размеры и форма будут зависеть от длины веревки и расстояния между воткнутыми в землю палками. Вы можете проделать тоже самое в тетради, если вместо двух палок возьмете булавки, а вместо третьей — карандаш.

Нарисовав несколько эллипсов, вы придете к выводу, что всякий эллипс — замкнутая выпуклая кривая, обладающая центром симметрии и двумя осями симметрии, одна из которых — прямая F_1F_2, а вторая — перпендикулярная ей прямая, проходящая через середину отрезка F_1F_2. Кроме того, нетрудно заметить, что для точек, лежащих внутри эллипса, сумма расстояний до фокусов меньше чем $2a$, а для точек, лежащих вне его, эта сумма больше чем $2a$.

Этих сведений оказывается достаточно, чтобы доказать важное и неочевидное свойство эллипса:

Если произвольную точку M, лежащую на эллипсе, соединить отрезками с его фокусами, то эти отрезки образуют равные углы с прямой, касающейся эллипса в этой точке M.

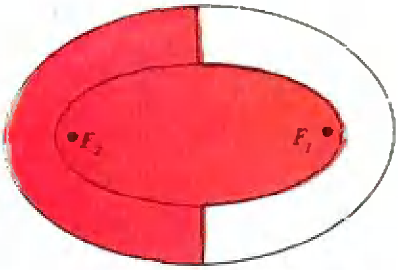


Рис. 4.

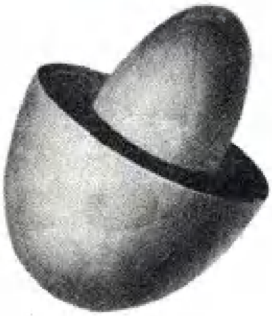


Рис. 5.

Вспомнив закон отражения света — угол падения равен углу отражения,— можно сформулировать это свойство так: *всякий луч, выходящий из одного фокуса эллипса, после отражения попадает во второй фокус.* Это свойство называют оптическим свойством эллипса. Оно наблюдается и в природе: существуют пещеры с эллипсоидальными сводами, в которых обнаруживается два места, достаточно удаленные друг от друга, но голос человека, стоящего в одном из этих мест, слышится в другом так, будто говорящий стоит рядом. В некоторых дворцах и замках архитекторы проектировали залы с таким эффектом.

Поскольку оптическое свойство эллипса будет основным в наших рассуждениях, то приведем его доказательство, тем более, что оно довольно короткое и простое.

Пусть l — прямая, касающаяся эллипса в точке M, и отрезки F_1M *и* F_2M *образуют с прямой* l *неравные углы* α и β (рис. 3). Построим точку F_1', симметричную точке F_1 относительно прямой l. Точка N пересечения прямой l с отрезком $F_1'F_2$ находится вне эллипса (в силу его выпуклости), и поэтому сумма ее расстояний до фокусов больше, чем у точки M, лежащей на эллипсе. Но из симметрии следует, что $F_1M=F_1'M$ и $F_1N=F_1'N$. Поэтому $F_2M+MF_1=F_2M+F_1'M$, что меньше, чем $F_2N+NF_1=F_2N+NF_1'$, т. е. $F_2F_1'>F_2M+MF_1'$. Но отрезки F_2F_1', F_2M и MF_1' — стороны треугольника F_2MF_1', а в нем сумма двух сторон больше *третьей стороны*, т. е. *выполняется обратное соотношение* $F_2F_1'<F_2M+MF_1'$. Таким образом, *предположение о различии углов* α *и* β *привело нас к противоречию.* Следовательно, эти углы равны (точка N совпадает с точкой M).

Теперь приступим к осуществлению нашего проекта создания вечного двигателя 2-го рода. Возьмем лист хорошей чертежной бумаги, отметим две точки F_1 и F_2, начертим два эллипса с фокусами в этих точках, взяв один раз нитку подлиннее, а во второй раз покороче. Начертим также прямую, проходящую через середину отрезка F_1F_2 перпендикулярно к нему. Теперь возьмем канцелярскую резинку и сотрем часть нарисованного так, чтобы получился «гриб», подобный тому, что изображен на рисунке 4.

Свернем бумагу в трубку и отправимся в ближайшую жестяную мастерскую. Там попросим по этому чертежу изготовить из жести оболочку, которая получается, если нарисованную кривую вращать вокруг ее оси симметрии F_1F_2 (рис. 5). (Поверхность, получаемая вращением эллипса вокруг его оси симметрии, называется эллипсоидом вращения). Внутренность полученной оболочки попросим покрыть отражающим слоем. Изготовленную конструкцию принесем домой. Вы стали владельцем вечного двигателя! Не верите? Докажем это строго математически.

Поместим в точках F_1 и F_2 по одинаково нагретому телу. Заметим, что любой луч (световой или тепловой), выходящий из точки F_1, попадает в точку F_2 (рис. 6). Луч, идущий по этой траектории из точки

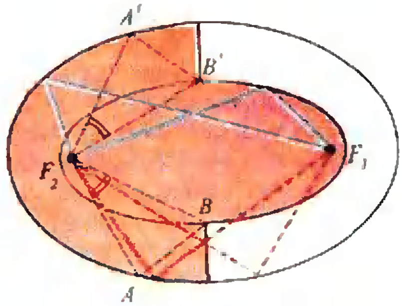


Рис. 6.

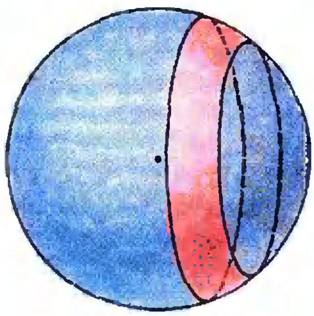


Рис. 7.

F_2, конечно же, попадет в точку F_1. Но возьмем луч, направленный из точки F_2 в вертикальную перегородку. Если бы этой перегородки не было, то этот луч, отразившись от стертой нами части эллипса, попал бы в фокус F_1. Но сейчас он после отражения пойдет по зеркально-симметричному пути и попадет вновь в точку F_2. Если путь по этой траектории проделать в обратную сторону, то мы снова, выйдя из точки F_2, вернемся в нее. Таких лучей будет довольно много. В сечении нашей конструкции, которое рассмотрено на рисунке 6, это будут лучи, расположенные внутри угла F_2AB и симметричного ему угла $F_2A'B'$.

Таким образом, тело в точке F_2 будет нагреваться, а тело в точке F_1 — охлаждаться. Можно даже подсчитать, каковы будут температуры тел после стабилизации процесса, если первоначальные температуры составляли T_0 градусов по шкале Кельвина.

(Кстати, шкала Кельвина названа так в честь уже упоминавшегося английского физика У. Томпсона, которому за выдающиеся научные заслуги был присвоен титул лорда Кельвина.)

Известно, что излучение тела пропорционально четвертой степени его температуры (по шкале Кельвина). Поэтому, если в точке F_1 температура равна T_1, а в точке F_2 она равна T_2, то излучение из точки F_1 равно kT_1^4; излучение из точки F_2 равно kT_2^4, но в точку F_1 попадает только его часть. Какая? Рассмотрим небольшую сферу вокруг точки F_2. Те лучи, которые возвращаются обратно в точку F_2, образуют на этой сфере кольцо (рис. 7). Если обозначить его площадь через S_1, а площадь сферы — через S, то получим, что доля излучения, возвращающегося обратно в точку F_2, равна $\frac{S_1kT_2^4}{S}$, а доля уходящего излучения равна $(S-S_1)\frac{kT_2^4}{S}$.

Если процесс установился, то энергия, уходящая из точки F_1, равняется падающей туда энергии, т. е.

$$(S-S_1)\frac{kT_2^4}{S}=kT_1^4.$$

В то же время тепловая энергия тела при температуре T равна произведению массы этого тела на теплоемкость и на температуру тела: $W=m\lambda T$. Из закона сохранения энергии следует, что

$$2m\lambda T_0=m\lambda T_1+m\lambda T_2.$$

Отсюда и из предыдущего соотношения получаем:

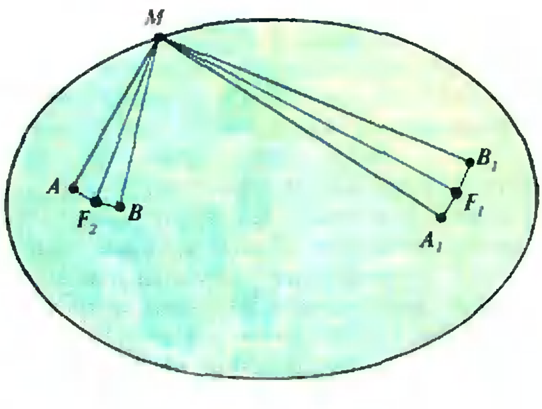


Рис. 8.

$$T_1=\frac{2T_0\sqrt[4]{\frac{S-S_1}{S}}}{1+\sqrt[4]{\frac{S-S_1}{S}}},$$

$$T_2=\frac{2T_0}{1+\sqrt[4]{\frac{S-S_1}{S}}}$$

Все! Можете проверить рассуждения с самого начала и убедиться в их справедливости. Неужели мы опровергли второе начало термодинамики? К сожалению (или к счастью), нет. Здесь есть ошибка. В чем она? Подумайте сами, а потом сверьте свой ответ с тем, что написано дальше. Думаю, что не все правильно ответят на этот вопрос.

Не правы будут те, кто ищет ошибку в физике, например в том, что здесь не учитывается конвекционный процесс, потому что внутри полости можно создать вакуум. Но кроме физики и математики здесь, вроде бы, ничего нет? Ошибка находится как бы на границе этих двух наук — при переходе от физического процесса к его математической модели.

Вспомним, что речь шла о телах, которые мы помещаем в фокусы. Тем самым мы пренебрегли размерами этих тел. Такая процедура привычна в физических рассуждениях, и фраза «тело находится в точке M» не вызывает чувства протеста. Такое пренебрежение размерами тела во многих случаях оправдано, поскольку движение тела под действием заданных сил, приложенных к его центру тяжести, не зависит от формы и размеров тела. Более того, и в ряде других случаев такая замена правомерна. Так, И. Ньютон показал, что слоисто-однородное тело (тело, составленное из нескольких однородных концентрических слоев) притягивает другие тела так же, как точка с той же массой, расположенная в центре этого шара. Так что замена тела точкой — процедура в физике вполне обычная.

Но в данном случае именно она приводит к ошибке. Посмотрим, что даст нам рассмотрение шаров ненулевого радиуса, центры которых лежат в фокусах.

Пусть точка M лежит на эллипсе в его левой половине. Рассмотрим луч, выходящий из точки F_2, отражающийся от эллипса в точке M и идущий далее в точку F_1, а также два луча, идущие в точку M и отстоящие от точки F_2 на расстояние r (рис. 8). Посмотрим, на каком расстоянии R от точки F_1 они пройдут после отражения от эллипса в точке M. Из подобия треугольников AF_2M и A_1F_1M, а также треугольников BF_2M и B_1F_1M получаем, что $\frac{r}{R}=\frac{F_2M}{F_1M}$. Поэтому, если точка M лежит в левой половине эллипса, то отраженный луч пройдет от фокуса F_1 на расстоянии бо́льшем, чем он находился от фокуса F_2. Таким образом, не все лучи, выходящие из тела Φ_2, попадут на тело Φ_1 или вернутся на Φ_2, а будут рассеиваться. Это обстоятельство разрушает все наши рассуждения и построения.

Любители физики, прочитавшие статью до этого места, могут быть довольны: второе начало термодинамики осталось незыблемым. А для любителей математики предложим еще несколько любопытных фактов о поведении лучей, отражающихся в эллиптическом зеркале.

Итак, если луч вышел из фокуса эллипса, то после отражения он попадает во второй фокус, и если там нет задерживающего тела, то он вновь попадает в первый фокус, потом снова во второй и так далее. Это очевидно. Но любопытно, что на каждом шаге траектория луча все больше приближается к прямой, на которой лежат фокусы и в пределе совпадает с отрезком AB. Если же траектория луча пересекает отрезок AB не в фокусе, то она уже никогда не пройдет через фокус. Более того, если она пересекает этот отрезок вне промежутка между фокусами, то и дальше она будет пересекать этот отрезок в точках, лежа-

(Окончание см. на с. 31)

Задачник „Кванта"

Задачи

M1286—M1290, Ф1293—Ф1297

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 15 августа 1991 года по адресу: 103006, Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 6 — 91» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «M1286» или «Ф1293». В графе «... адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «... новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

Задачи M1286—M1289 предлагались на олимпиадах и матбоях в г. Ленинграде в 1968—1971 гг.

M1286. На конгрессе присутствуют 100 делегатов, каждый из которых знает несколько иностранных языков. Известно, что любые трое могут поговорить между собой без помощи остальных. Докажите, что делегатов можно поселить в 50-ти двухместных номерах гостиницы так, что живущие в одном номере могли бы разговаривать между собой.

M1287. В параллелограмме $ABCD$ диагональ AC больше диагонали BD. Точка M на диагонали AC такова, что около четырехугольника $BCDM$ можно описать окружность. Докажите, что BD — общая касательная окружностей, описанных около треугольников ABM и ADM.

M1288*. Докажите, что число 235^2+972^2 — составное.

M1289*. Целые числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ таковы, что их сумма равна 1. Для каждого k от 1 до n через N_k обозначим количество положительных чисел среди n сумм: a_k, a_k+a_{k+1}, ..., $a_k+a_{k+1}+\ldots+a_n+a_1+\ldots+a_{k-1}$. Докажите, что все N_k различны.

M1290*. Квадратный лист бумаги размерами 8×8 разграфлен 14-ю прямыми на 64 квадратные клетки 1×1 и произвольным образом сложен по этим линиям в книжку 1×1 (из 64 листов). Листы книжки нумеруются по порядку числами 1, 2, .., 64, а затем она вновь разворачивается. Пусть p — наибольшая разность номеров соседних (граничащих по стороне) клеток. Каково наименьшее возможное значение p и при каком складывании оно достигается?

М. Гусаров

Ф1293. Цилиндрический сосуд с легким и тонким приставным дном, плотно прилегающим к стенке сосуда, опущен в воду так, что дно находится на глубине $H=4$ см, и удерживается неподвижно (рис. 1). Гирю какой минимальной массы и куда надо поставить на дно, чтобы дно отвалилось? Диаметр дна $D=10$ см, размеры гири считать малыми по сравнению с диаметром сосуда.

Ф1294. Одна сторона тонкой металлической пластинки освещена солнцем. При температуре воздуха T_0 освещенная сторона имеет температуру T_1, противоположная — T_2. Какими будут значения температур, если взять пластинку двойной толщины?

Е. Пономарев

Ф1295. К точкам A и $Б$ подключена многозвенная резисторная цепь (рис. 2). Каждое звено содержит два одинаковых резистора, сопротивление резисторов каждого следующего звена в два раза больше предыдущего. Каким будет сопротивление между точками A и $Б$ при очень большом числе звеньев? Резисторы в первом звене имеют сопротивление R.

А. Зильберман

Задачник „Кванта"

Ф1296. В контуре LC происходят колебания. В тот момент, когда напряжение на конденсаторе U, а ток через катушку I, замыкают ключ K, присоединяя параллельно контуру цепь, состоящую из параллельно соединенных резистора сопротивлением R и катушки индуктивностью $2L$ (рис. 3). Определите полное количество теплоты, которое выделится в резисторе.

О. Савченко

Ф1297. Параллельно главной оптической оси собирающей линзы с фокусным расстоянием F движется точечный источник света. На каком расстоянии от линзы он окажется в тот момент, когда скорость изображения его в линзе будет равна по величине скорости источника? Расстояние от главной оптической оси линзы до источника $H=F/4$.

З. Рафаилов

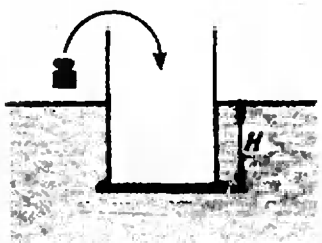


Рис. 1.

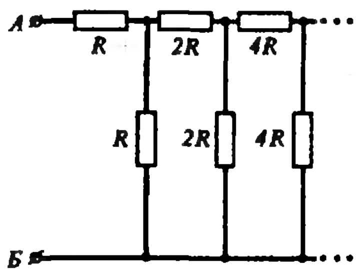


Рис. 2.

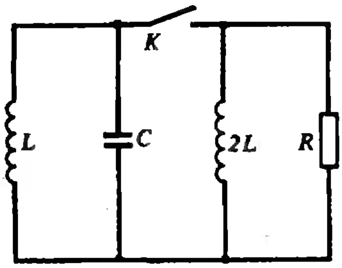


Рис. 3.

Решения задач

M1261 — M1265, Ф1273 — Ф1277

M1261. *На плоскости расположено 1991 красных, черных и желтых точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Некоторые пары точек разного цвета соединены отрезками, причем из каждой точки выходит одинаковое число отрезков. Докажите, что найдется красная точка, которая соединена и с черной, и с желтой точкой.*

В формулировке задачи M1261 было пропущено важное условие. Приводим правильную формулировку. Срок отправки решений продлевается до 1 сентября.

M1262. *Пусть d_1, d_2, d_3 — попарные разности длин сторон треугольника (по*

Это утверждение можно доказать разными способами. Пусть $a \geqslant b \geqslant c$ — положительные числа, для которых $b+c \geqslant a$ (длины сторон треугольника). Будем раздви-

абсолютной величине), P — его периметр. Докажите неравенство

$d_1d_2+d_2d_3+d_3d_1 \leqslant P^2/4.$

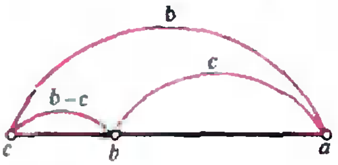


Рис. 1.

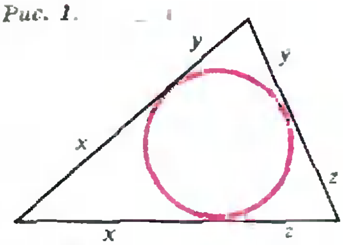


Рис. 2.

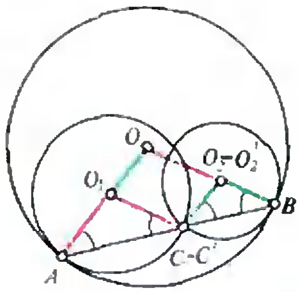
Задачник „Кванта"

гать крайние числа a и c так, что их сумма сохраняется, до тех пор, пока не придем к тройке, в которой большее число равно сумме остальных ($b+c=a$). Очевидно, что при этом $P=a+b+c$ и правая часть неравенства не меняется, а все попарные разности между числами и тем самым левая часть возрастают. Таким образом, достаточно доказать неравенства для тройки, в которой $a-c=b$ (рис. 1). Но в этом случае оно очевидно: левая часть равна $b^2+c(b-c)=$ $=b^2+bc-c^2$, а правая — $(b+c)^2=b^2+2bc+c^2$.

Другое, более лобовое решение. Стороны треугольника всегда можно представить в виде $x+y$, $x+z$, $y+z$, где $x \geqslant y \geqslant z$ — положительные числа (это — отрезки, на которые точки касания вписанной окружности делят стороны (рис. 2). Выразив через x, y, z обе части неравенства, мы сразу придем к очевидному неравенству.

Н. Васильев, Л. Курляндчик

М1263. *Внутри окружности лежат еще две окружности, касающиеся внешней окружности в точках A и B соответственно и пересекающиеся между собой. Докажите, что если одна из точек пересечения лежит на отрезке AB, то сумма радиусов меньших окружностей равна радиусу большей. Верно ли обратное?*



Пусть O, O_1, O_2 — центры данных окружностей; r, r_1, r_2, соответственно,— их радиусы (см. рисунок), причем O_1 лежит на OA, а O_2 — на OB. Если точка C пересечения окружностей O_1 и O_2 лежит на AB, то равнобедренные треугольники OAB, O_1AC и O_2BC подобны друг другу (у них равны углы при основании). Отсюда, очевидно, следует, что OO_1CO_2 — параллелограмм, а значит, $r=OA=OO_1+O_1A=O_2C+O_1A=r_2+r_1$.

Верно и обратное утверждение: если $r=r_1+r_2$, то отрезок AB проходит через точку пересечения окружностей O_1 и O_2. Для его доказательства построим параллелограмм $OO_1C'O_2'$, вершины C' и O_2' которого лежат на отрезках AB и OB. Треугольники O_1AC' и $O_2'BC'$ подобны равнобедренному треугольнику OAB, поэтому

$$O_1C'=O_1A=r_1,$$

а значит, C' лежит на окружности O_1, и

$$O_2'B=O_2'C'=OO_1=OA-O_1A=r_2,$$

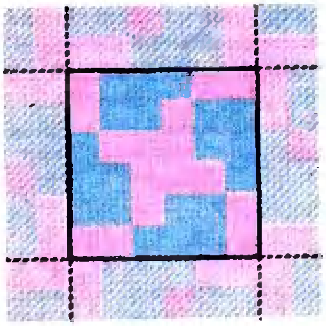
откуда следует, что $O_2'=O_2$ и что C' лежит также и на окружности O_2.

В. Дубровский

М1264*. *На бесконечном белом листе клетчатой бумаги квадрат 2×2 клетки надо закрасить в черный цвет. Можно ли это сделать несколькими опера-*

Ответ: нельзя. Мы докажем это, пользуясь идеей, часто встречающейся при решении подобных задач. Раскрасим клетчатую плоскость в два цвета (скажем, красный и голубой) так, чтобы любой квадрат 3×3 и 4×4 клетки содержал четное число красных клеток, а некоторый квадрат 2×2 — нечетное их число.

циями, каждая из которых — перекрашивание в противоположный цвет всех клеток в квадрате 3×3 или 4×4 клетки?



Задачник „Кванта"

Из существования такой раскраски сразу следует нужное утверждение: ведь после любых операций, указанных в задаче, черными станет лишь четное число красных клеток. А если бы лишь один (можно считать — тот самый, с нечетным числом красных клеток) квадрат 2×2 стал черным, это бы означало, что черными стали нечетное число красных клеток.

Но придумать нужную раскраску не так просто. Мы приведем пример нужной периодической раскраски с периодом 6: в каждом квадрате 6×6, на которые разбита плоскость двумя рядами прямых, раскраска получается параллельным переносом квадрата, показанного на рисунке.

И. Кан

М1265*. *а) Докажите, что среди 21 попарных расстояний между 7 различными точками плоскости одно и то же число встретится не более 12 раз.*
б) Какое наибольшее количество раз может встретиться одно и то же число среди 15 попарных расстояний между 6 различными точками плоскости?

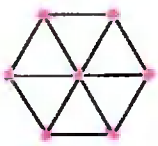


Рис. 1.

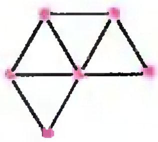


Рис. 2.

Ответ: б) 9. Пример приведен на рисунке 2.

Докажем утверждение а). Пусть расстояние a для точек $A_1, A_2, \ldots, A_7$ плоскости повторяется самое большее k раз. Обозначим через n_i количество отрезков длины a, выходящих из точки A_i. Не нарушая общности, можем считать, что $n_1 \geqslant n_2 \geqslant \ldots \geqslant n_7$.

Заметим, что $n_1 + n_2 \leqslant 9$. Действительно, в противном случае на окружностях с центрами A_1 и A_2 и радиусом a из 7 точек найдутся самое меньшее $n_1 + (n_2 - 2) \geqslant 8$ точек, что невозможно.

Ясно, что из точек A_1, A_2, A_3, A_4 расстояние между какими-то двумя точками не равно a. Пусть $A_iA_j \neq a$ $(i \neq j)$. В этом случае на окружностях с центрами A_i, A_j и радиусом a найдутся самое меньшее $n_i + n_j - 2$ точки, так как точки A_i и A_j не находятся на указанных окружностях, значит, $n_i + n_j - 2 + 2 \leqslant 7$. Поэтому $n_3 + n_4 \leqslant n_i + n_j \leqslant 7$, отсюда имеем $n_4 \leqslant 3$, тем самым $n_7 \leqslant n_6 \leqslant n_5 \leqslant 3$.

Поэтому

$$k = \frac{1}{2}\Big((n_1 + n_2) + (n_3 + n_4) + n_5 + n_6 + n_7\Big) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}(9 + 7 + 3 + 3 + 3),$$

откуда $k \leqslant 12$.

Пример очевиден (рис. 1) в правильном шестиугольнике со стороной a, расстояние a для вершин и центра повторяется 12 раз. Значит, $k = 12$.

Для задачи б) аналогичное рассуждение дает оценку

$$k \leqslant \frac{1}{2}(8 + 6 + 3 + 3) \leqslant 10.$$

Однако легко проверить, что наборы $n_1 = 5$, $n_2 = \ldots = n_6 = 3$ и $n_1 = n_2 = 4$, $n_3 = \ldots = n_6 = 3$ невозможны (в последнем случае для точки A_i — единственной, не лежащей на окружности радиуса a с центром A_1 — $n_i \leqslant 2$).

Интересно было бы найти точное (или хотя бы «асимптотически» точное) значение k_n для аналогичной задачи про n точек плоскости. Можно доказать, что $k_n/n^2 \to 0$ при $n \to \infty$, но мы не знаем, верно ли (хотя это и правдоподобно), что $k_n \leqslant Cn$ при некотором C, и тем более не умеем находить наименьшее значение C. Вполне вероятно, что наименьшее из попарных расстояний между n точками может повторяться не более $3n-9$ раз.

А. Акопян, И. Седракян

Ф1273. *Веревка длиной l закреплена одним из своих концов в вершине сферы радиусом R (рис. 1). В некоторый момент веревку отпускают. Найдите ускорение веревки сразу после этого. Трение отсутствует.*

Рис. 1.

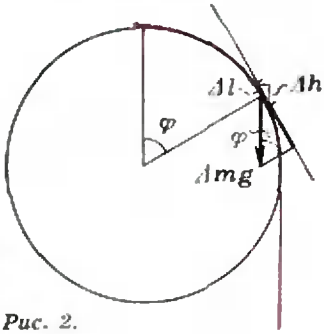


Рис. 2.

Единственной силой, ускоряющей веревку, является сила тяжести. Значит, надо найти ее составляющую вдоль сферы.

Разобьем веревку на маленькие участки длиной Δl (рис. 2). Пусть угол между радиусом, проведенным к одному из таких участков из центра сферы, и вертикалью равен φ. Тогда составляющая силы тяжести вдоль сферы для этого участка равна

$$\Delta F = \Delta mg \sin\varphi = \frac{M}{l}\Delta lg \sin\varphi,$$

где M — длина веревки. Но из рисунка видно, что

$$\Delta l \sin\varphi = \Delta h,$$

где Δh — разность высот концов этого участка, следовательно,

$$\Delta F = \frac{M}{l} g\Delta h.$$

Искомая суммарная ускоряющая сила есть

$$F = \sum_{i=1}^{N} \Delta F_i = \frac{M}{l} g \sum_{i=1}^{N} \Delta h_i = \frac{M}{l} gH.$$

В случае, если длина веревки равна, например, четверти длины окружности, т. е. $l = \pi R/2$, $H = R$, и ускорение веревки в начальный момент равно

$$a = \frac{F}{M} = \frac{2}{\pi} g.$$

А. Быцко

Ф1274. *В теплоизолированном сосуде, разделенном пополам перегородкой, находится пар, близкий к насыщению: в левой части — при температу-*

При решении задач такого типа важно установить, происходит ли фазовый переход, что может дать дополнительные слагаемые в уравнение теплового баланса. В нашем случае такого не произойдет, и вот почему. Давление и плотность насыщенного пара при $+50\ °C$ существенно выше, чем при $+20\ °C$:

ре $+20\ ^\circ C$, а в правой — при $+50\ ^\circ C$. Перегородку удаляют. Какое давление установится в сосуде? Какое давление в нем будет, если нагреть содержимое до $+50\ ^\circ C$? охладить до $+20\ ^\circ C$? Воды в сосуде первоначально нет. Необходимые для расчета данные возьмите в таблицах.

	$t_1 = +20\ ^\circ C$	$t_2 = +50\ ^\circ C$
ρ, кг/м³	0,0176	0,084
p, Па	2380	12 500

Это означает, что почти вся масса пара сосредоточена в правой части сосуда, и после смешивания почти то же самое количество пара придется на вдвое больший объем. Следовательно, пар останется ненасыщенным.

Обозначим установившуюся в сосуде температуру через T_3 и запишем уравнение теплового баланса:

$$\rho_1 \frac{V}{2}(T_3 - T_1) = \rho_2 \frac{V}{2}(T_2 - T_3),$$

откуда

$$T_3 = \frac{\rho_1 T_1 + \rho_2 T_2}{\rho_1 + \rho_2} = 318\ \text{К},\ t_3 = 45\ ^\circ C.$$

Теперь легко найти установившееся давление:

$$p_3 = mRT/(MV) = (\rho_1 + \rho_2)RT/M = p_2 T_3/(2T_2) = 6150\ \text{Па}.$$

Можно, на всякий случай, убедиться, что полученное давление меньше давления насыщенного пара для температуры $+45\ ^\circ C$.

Если теперь нагреть пар до $+50\ ^\circ C$, то давление немного вырастет и составит

$$p_4 = p_3 T_2/T_3 = 6250\ \text{Па}.$$

Если пар охладить до $+20\ ^\circ C$, то он станет насыщенным, а его давление составит (см. таблицу)

$$p_5 = 2380\ \text{Па}.$$

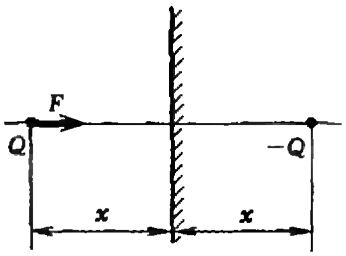
М. Яскевич

Ф1275. *Точечную частицу, имеющую массу m и заряд Q, помещают на расстоянии L от бесконечной проводящей плоскости и отпускают. За какое время частица долетит до плоскости? Сила тяжести отсутствует. (Подсказка: можно воспользоваться методом зеркальных отображений.)*

При помещении заряженной частицы у проводящей плоскости на этой плоскости наводятся заряды, притягивающие частицу. Их действие эквивалентно действию заряда-изображения, равного по величине $-Q$ и расположенного на таком же расстоянии от плоскости, но по другую ее сторону (см. рисунок). Сила, действующая на частицу, удаленную на расстояние x от плоскости, находится из закона Кулона:

$$F = \frac{kQ^2}{(2x)^2} = \frac{kQ^2}{4x^2}.$$

Представим себе, что такая же сила действует на нашу частицу, испытывающую не электрическое, а гравитационное взаимодействие с точечной массой M, помещенной в точке O. Эта масса должна быть



равна

$$M=\frac{Fx^2}{Gm}=\frac{kQ^2}{4mG}.$$

Теперь движение частицы можно описать, используя законы Кеплера.

Траекторию частицы можно считать очень вытянутым эллипсом, имеющим большую полуось $a=L/2$ и малую полуось $b \ll a$ (при этом фокусы эллипса находятся в точке O и в точке первоначального положения частицы). Заменим эллиптическую орбиту круговой с радиусом L и найдем период обращения T_0 частицы вокруг массы M:

$$m\frac{4\pi^2}{T_0^2}L=G\frac{mM}{L^2} \Rightarrow T_0=2\pi\sqrt{\frac{L^3}{GM}}.$$

Для нахождения периода T в случае эллипса с полуосью $a=L/2$ применим третий закон Кеплера:

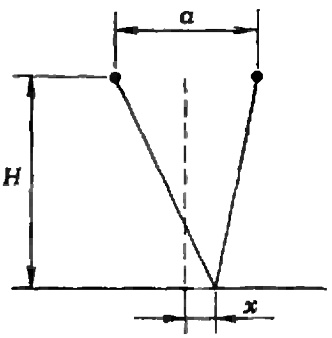
$$T=T_0\left(\frac{a}{a_0}\right)^{3/2}=T_0\left(\frac{L/2}{L}\right)^{3/2}=\frac{1}{2\sqrt{2}}T_0.$$

Очевидно, что время, за которое частица долетит до плоскости, равно половине периода обращения:

$$t=\frac{1}{2}T=\frac{1}{4\sqrt{2}}T_0=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\sqrt{\frac{L^3}{GM}}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}\frac{L}{Q}\sqrt{\frac{Lm}{k}}.$$

А. Быцко

Ф1276. *На высоте $H=20$ м над плоскостью пола в вершинах квадрата со стороной $l=1$ м расположены четыре одинаковых громкоговорителя. На них подается синусоидальный сигнал частотой $f=1$ кГц. На каком расстоянии от точки максимальной громкости на полу громкость падает до нуля?*



Точка максимальной громкости на полу находится точно под центром квадрата, в вершинах которого располагаются громкоговорители. (Для простоты мы будем считать их точечными излучателями звука; правда, для выбранной нами частоты $f=1000$ Гц длина волны составляет $\lambda=0{,}33$ м и наше упрощение не вполне оправданно, хотя и вынужденно.) Если мы отойдем от точки максимума, то пришедшие от излучателей волны будут иметь различные фазы и результат сложения будет меньше, чем в центре.

Сделаем еще одно необходимое упрощение — будем считать, что интересующая нас точка минимума находится недалеко от центра (по сравнению с высотой зала) и амплитуды пришедших волн практически одинаковы (вообще говоря, по мере удаления от излучателя амплитуда падает). Ясно, что ближе всего к центру мы найдем точку минимума, если будем смещаться по полу параллельно одной из сторон квадрата (см. рисунок). Условие минимума определяется разностью хода волн от одной пары излучателей (одновременно и от другой):

$$\sqrt{H^2+(a/2+x)^2}-\sqrt{H^2+(a/2-x)^2}=\lambda/2.$$

Решать это уравнение можно либо численно — подбирая на калькуляторе нужное значение x, либо воспользовавшись каким-нибудь более цивилизованным методом решения уравнений на ЭВМ. Однако можно обойтись и более простыми средствами, заметив, что второе слагаемое в каждом из корней существенно меньше первого. Тогда стоит умножить и разделить выражение в левой части на сумму корней, которая приблизительно равна $2H$ (это только вычитать близкие числа нужно осторожно, а складывать можно смело). При этом уравнение сильно упростится:

$$2ax = 2H\lambda/2 \Rightarrow x = 1{,}65 \text{ м}.$$

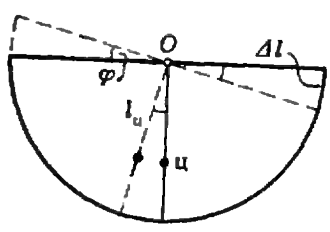
Можно немного уточнить ответ, подставив найденное значение x в подкоренные выражения для суммы, которую мы приняли равной $2H$, однако разница получится совсем незначительной.

Учет отражений звуковых волн от пола ответа не изменит — можно считать, что добавятся «зеркальные» источники звука, а соотношение для разности хода останется прежним. А вот учет отражений от стен может ответ изменить сильно.

Имеет ли ситуация, описанная в задаче, какое-нибудь отношение к реальной действительности? К сожалению, имеет. И это знает каждый, кто пытался понять, что же объявляет диктор на вокзале через множество громкоговорителей, одновременно излучающих звук в условиях многократных отражений от стен и пола. Дело в том, что для различных частот, одновременно присутствующих в речевом сигнале, условия сложения пришедших волн дают и минимумы, и максимумы, в результате полный сигнал сильно отличается от исходного. Вам очень повезет, если рядом будет находиться один из громкоговорителей, сигнал которого будет сильно превышать остальные, и интерференция получится не слишком сильной.

А. Зильберман

Ф1277. *Из тонкой проволоки сделали замкнутую фигуру, изображенную на рисунке. Радиус полуокружности равен R. Где находится центр тяжести этой фигуры? Чему равен период малых колебаний относительно точки O?*



Для определения положения центра масс (центра тяжести) фигуры воспользуемся не прямым расчетом, а энергетическими соображениями. А именно — тем свойством центра масс, что потенциальную энергию произвольного тела массой m можно вычислить по формуле

$$E_p = mgh_ц,$$

где $h_ц$ — высота центра масс относительно выбранного нулевого уровня.

Повернем нашу фигуру на небольшой угол φ (см. рисунок) и найдем изменение ее потенциальной энергии, причем сделаем это двумя способами. Во-первых, свяжем ΔE_p с изменением высоты центра масс фигуры (учитывая малость угла φ):

$$\Delta E_p = mg\Delta h_ц = mgl_ц(1 - \cos\varphi) = mgl_ц \cdot 2\sin^2(\varphi/2) = {}^1/_2\, mgl_ц\varphi^2, \qquad (1)$$

где $l_ц$ — расстояние от центра масс до точки O. Во-вторых, воспользуемся особенностями формы проволочной фигуры. Посмотрите внимательно на рисунок и вы увидите, что при повороте потенциальная энергия прямой перемычки не изменяется, а изменение потенциальной энергии полуокружности связано с перемещением ее небольшого участка длиной Δl с правого конца на левый:

$$\Delta E_p=\Delta mg\Delta l=\frac{m}{2R+\pi R}\Delta l\,g\,\Delta l=\frac{mgR}{2+\pi}\varphi^2. \qquad (2)$$

Из выражений (1) и (2) получаем

$$l_ц=\frac{2R}{2+\pi}.$$

(Попробуйте самостоятельно рассчитать положение центра масс полуокружности без перемычки; в этом случае $l_ц=2R/\pi$.)

Продолжим наши вычисления, причем опять воспользуемся энергетическими соображениями. Заметим, что если энергию колебательной системы удается привести к виду

$$E=E_p+E_k=\frac{Ax^2}{2}+\frac{Bx'^2}{2},$$

где x — параметр, описывающий отклонение системы от положения равновесия, а x' — производная от x по времени, то период колебаний системы равен

$$T=2\pi\sqrt{\frac{B}{A}}.$$

В нашем случае $x=\varphi$. Из выражения (2) сразу получаем

$$A=\frac{2mgR}{2+\pi}.$$

Для определения величины B вычислим кинетическую энергию нашей фигуры. Вклад полуокружности найти совсем просто, так как скорость любой ее точки равна $v=\omega R=\varphi' R$:

$$E_{k1}=\frac{m_1v^2}{2}=\frac{1}{2}\frac{m\pi R}{2R+\pi R}(\varphi' R)^2=\frac{\pi mR^2}{2+\pi}\frac{\varphi'^2}{2}.$$

С перемычкой сложнее — разные ее точки имеют различные скорости. Приведем ответ, выраженный через момент инерции стержня I (надеемся, что большинство наших читателей знакомы с этим понятием):

$$E_{k2}=I\frac{\varphi'^2}{2}=\frac{m_2(2R)^2}{12}\frac{\varphi'^2}{2}=\frac{m2R}{2R+\pi R}\frac{R^2}{3}\frac{\varphi'^2}{2}=\frac{2mR^2}{3(2+\pi)}\frac{\varphi'^2}{2}.$$

Для полной кинетической энергии получаем

$$E_k=E_{k1}+E_{k2}=\frac{(2+3\pi)mR^2}{3(2+\pi)}\frac{\varphi'^2}{2},$$

откуда

$$B=\frac{(2+3\pi)mR^2}{3(2+\pi)}.$$

Теперь уже можно найти период колебаний системы:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{B}{A}}=2\pi\sqrt{\frac{(2+3\pi)R}{6g}}.$$

Заметим, что если перемычка невесома, то период колебаний равен $T=2\pi\sqrt{\pi R/(2g)}$. Убедитесь в этом самостоятельно.

А. Черноуцан

Поправка.
В «Кванте» № 3, на с. 18 в условии задачи М1273 формула, которую надо доказать, должна выглядеть так:

$$S_1 \pm S_2 = S(1/2+6k^2).$$

В «Кванте» № 5 на с. 25 последнее слово должно быть не «наибольшим», а «наименьшим».

Приносим свои извинения за допущенные ошибки.

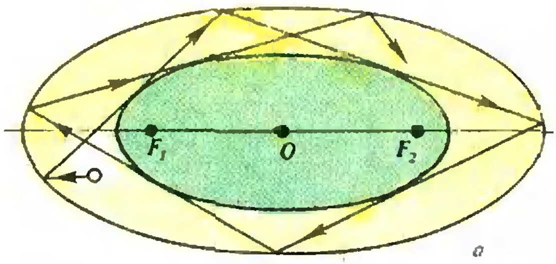
Перпетуум-мобиле и математика

(Начало см. на с. 17)

щих вне этого промежутка. Но самое удивительное состоит в том, что, оказывается, существует эллипс с теми же фокусами F_1 и F_2, которого траектория луча касается после каждого отражения (рис. 9).

Аналогично, траектории, выходящие из точек отрезка F_1F_2, вновь пересекают прямую AB лишь в точках этого отрезка. При этом отрезки траектории (или их продолжения) касаются некоторой гиперболы с фокусами F_1 и F_2. (Гиперболой с фокусами F_1 и F_2 называется кривая, состоящая из всех таких точек M, разность расстояний которых до точек F_1 и F_2 равняется заданной постоянной величине.) Эллипсы и гиперболы, а также многие их свойства были известны еще математикам Древней Греции, они же и дали им эти названия: «гипербола» — преувеличение, избыток и «эллипс» — преуменьшение, недостаток.

Желающие более подробно ознакомиться со свойствами траекторий внутри эллипсоидального зеркала и в других зеркалах могут это сделать, взяв книгу Г. Гальперина и А. Землякова «Математические бильярды» (М.: Наука, 1990. Библиотечка «Квант»).



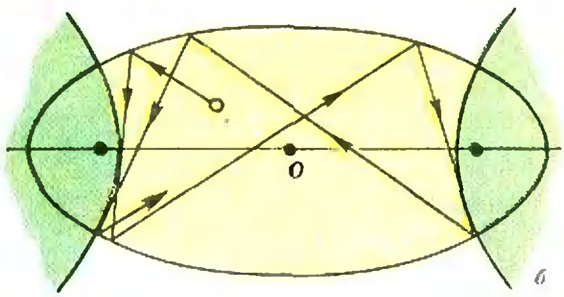
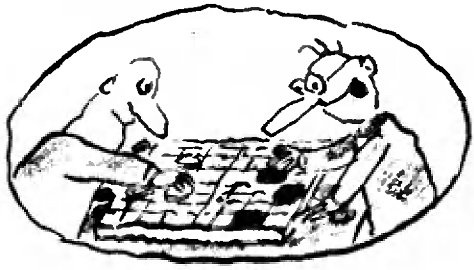


Рис. 9.

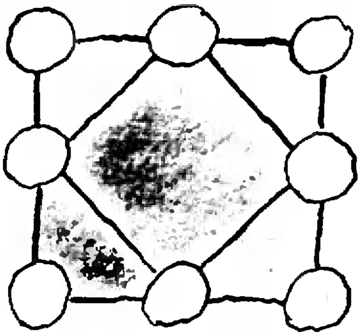
Задачи

1. В магазин поступила тонна фруктов: яблоки в ящиках по 48 кг, груши в ящиках по 20 кг, сливы в коробках по 14 кг и вишни в коробках по 10 кг. При этом яблок поступило в два раза больше, чем груш, а вишен столько же, сколько слив. Сколько фруктов каждого вида поступило в магазин?



2. Игра в шашки часто оканчивается вничью, а может ли быть ничья при игре в «поддавки»?

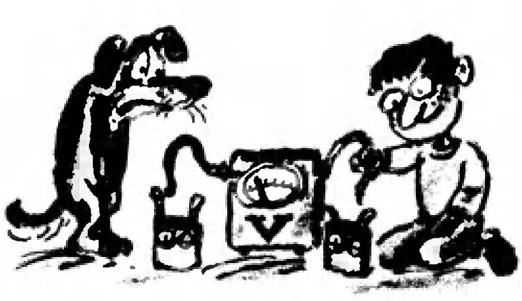
3. Расставьте в кружках числа от 1 до 8 так, чтобы сумма чисел в вершинах каждого синего треугольника равнялась 12, а в вершинах красного треугольника и красного квадрата — по 11.



4. Решите арифметический ребус. Одинаковым буквам соответствуют одинаковые числа, разным — разные.

$$ИЗ^4 = ИКС^2 = БАЗИС$$

5. Имеются две батарейки — одна на 3 вольта, а вторая на 9 вольт. Какое напряжение покажет вольтметр, подключенный к плюсу первой батарейки и к минусу второй?



Эти задачи нам предложили: В. Вьюн, А. Домашенко, шестиклассник Володя Дутов, Н. Антонович и А. Савин.

КАК КИПИТ ВОДА?

(Эффект Лейденфроста)

Дж. УОКЕР

Тот факт, что капля воды, нанесенная на металл, температура которого гораздо выше температуры кипения воды, живет долго, был впервые описан еще в 1732 году, но достаточно широко не исследовался до 1756 года, пока Иоганн Готлиб Лейденфрост не опубликовал свой «Трактат о некоторых свойствах обычной воды». Из-за того, что работа Лейденфроста не переводилась с латыни до 1965 года, она оказалась мало известной. Тем не менее сейчас именно его имя связывается с явлением долговременности жизни капли на горячей пластине. Кроме того, температура, соответствующая пику полученного мной графика зависимости времени жизни капли от температуры поверхности (рис. 1), называется точкой Лейденфроста.

Лейденфрост делал опыты с железной ложкой, докрасна раскаленной в горне. Помещая в ложку каплю воды, он измерял время ее жизни с помощью качающегося маятника. Он отметил, что капля, казалось, всасывала свет и тепло ложки, оставляя на поверхности пятно более тусклое, чем остальная часть ложки. Первая капля продержалась в ложке 30 секунд, вторая капля — только 10, последующие — лишь несколько секунд.

Лейденфрост неправильно понял результаты своих опытов, потому что не осознал, что долгоживущие капли на самом деле кипели. Разрешите мне объяснить это.

При температуре пластины ниже точки Лейденфроста вода растекается по пластине и быстро отводит тепло от нее, что обеспечивает полное испарение капли за несколько секунд. Когда температура равна или выше точки Лейденфроста, нижняя часть капли, нанесенной на пластину, почти мгновенно испаряется, и давление образовавшегося пара не позволяет остальной части капли коснуться пластины. Слой пара постоянно пополняется за счет дополнительной воды, испаряющейся с нижней поверхности, благодаря теплу от пластины, которое излучается и проводится сквозь пар. Хотя толщина слоя менее 0,1 мм у наружной границы и около 0,2 мм в центре, он резко замедляет испарение капли (рис. 2). Таким образом пар поддерживает и защищает каплю в течение минуты или около того.

Чтобы показать течение пара из-под капли Лейденфроста, я посыпáл пла-

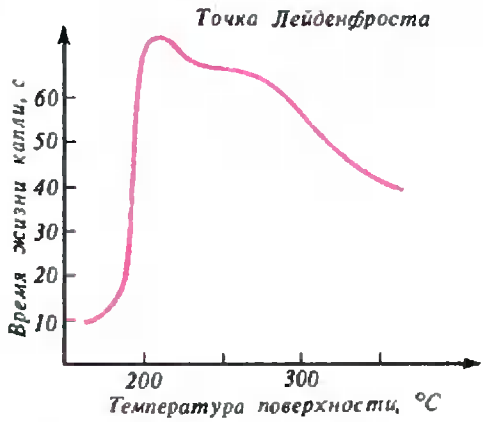


Рис. 1. Время жизни капли на горячей пластине.

Рис. 2. Поперечное сечение капли Лейденфроста.

Продолжение. Начало статьи опубликовано в предыдущем номере журнала.

стину мелким порошком. Когда капля кружилась по пластине, пар, идущий из-под нее, сдувал с пути крупицы порошка. Я также создавал большие амебоподобные капли воды, вводя шприц в верх плавающей капли и добавляя в нее несколько струек воды. Такие капли были довольно громоздкими и часто разрушали слой пара под ними из-за своего большого веса. Каждое такое разрушение отмечалось громким шипением, так как часть капли внезапно испарялась.

Аналогичные опыты можно проводить не только с водой, но и с другими жидкостями. Для уксуса, например, точка Лейденфроста соответствует температуре около 250 °С, для спирта — около 150 °С.

Прочитав перевод исследования Лейденфроста, я вспомнил описание интересного трюка, который показывали на карнавалах в начале века. Рассказывают, что исполнитель мог окунать мокрые пальцы в расплавленный свинец. Решив, что там не было надувательства, я предположил, что этот трюк должен основываться на эффекте Лейденфроста. Как только мокрые пальцы исполнителя прикасались к горячему жидкому металлу, часть воды испарялась, покрывая кисть слоем пара. Если пальцы погружать быстро, они значительно не нагреются.

Я не мог воспротивиться искушению проверить свое объяснение. На лабораторной горелке я расплавил в тигле крупный кусок свинца. Затем я нагрел свинец до температуры более 400 °С, что гораздо выше его температуры плавления (328 °С). Намочив палец в водопроводной воде, я приготовился коснуться поверхности расплавленного свинца. Должен признаться, что мой помощник стоял рядом с аптечкой. Также должен признаться, что несколько первых попыток оказались неудачными, так как мой мозг протестовал против этого нелепого эксперимента, направляя палец мимо свинца.

Когда я наконец преодолел страх и быстро коснулся свинца, я был поражен. Как я и думал, часть воды на пальце испарилась, образуя защитный слой. Так как контакт был коротким, излучения и проводимости тепла было недостаточно для того, чтобы ощутимо поднять температуру кожи. Я расхрабрился. Намочив кисть, я погрузил все пальцы в свинец, коснувшись дна сосуда,— ожога не было. Очевидно, эффект Лейденфроста, или точнее — наличие пленочного кипения, защитило мои пальцы.

Я еще сомневался в моем объяснении. А возможно ли коснуться свинца сухим пальцем, не обжегшись? Отбросив все разумные мысли, я попытался это сделать и мгновенно понял свою глупость, когда боль пронзила палец. Я продолжил эксперимент с помощью маленькой сухой сосиски, погружая ее в расплавленный свинец на несколько секунд. Ее кожица быстро чернела — ей недоставало защиты пленочным кипением, как и моему сухому пальцу.

Вы не должны повторять этот опыт ни в коем случае!

Надо сказать, что погружение пальцев в расплавленный свинец представляет собой серьезную опасность. Если температура свинца лишь чуть выше точки плавления, потеря тепла при испарении воды может привести к затвердению свинца на пальцах. Если выдергивать получившуюся «перчатку» из горячего твердого свинца из сосуда, она будет контактировать с пальцами так долго, что они обязательно будут сильно обожжены. Кроме того, очень опасны мокрые пальцы. Когда избыточная вода испаряется, она может вызвать разбрызгивание расплавленного свинца на все окружающее и, что особенно серьезно, в глаза. От таких взрывных испарений у меня остались шрамы на руках и лице.

Похожий пример использования эффекта Лейденфроста описан в бестселлере Роберта Руанка «Нечто значительное». Чтобы определить, кто из двух людей говорит правду, вождь африканской деревни приказал каждому лизнуть горячий нож. Считается, что язык правдивого человека будет смочен слюной. Тогда часть слюны подвергнется пленочному кипению, и язык не будет обожжен. С другой стороны, у лжеца пересохнет во рту, и защиты пленочным кипением не будет.

Пленочное кипение можно также увидеть, когда проливается жидкий азот — большие и маленькие капли сворачиваются в шарики и катаются по полу. Температура жидкого азота около —200 °С. Когда капля пролитой жидкости приближается к полу, ее нижняя поверхность испаряется, образовавшийся слой пара поддерживает оставшуюся жидкость, позволяя ей прожить удивительно долгое время.

Мне рассказывали о трюке, при котором исполнитель лил в рот жидкий азот «не обжигаясь», несмотря на его крайне низкую температуру. Жидкость немедленно подвергалась пленочному кипению по нижней поверхности и не касалась непосредственно языка. По глупости я повторил этот опыт. Неоднократно все проходило гладко и эффектно. С большой каплей жидкого азота во рту я концентрировался на том, чтобы не проглотить ее, и при этом выдыхал. Влага в моем холодном дыхании конденсировалась, создавая ужасную струю, тянущуюся изо рта примерно на метр. Однако в последний раз жидкость термически повредила два моих передних зуба так сильно, что эмаль превратилась в «дорожную карту» из трещин. Мой дантист убедил меня прекратить этот опыт.

Эффект Лейденфроста может также играть роль в другом безрассудно храбром опыте — ходьбе по горячим углям. Иногда средства массовой информации с большой шумихой и различной мистической чушью сообщают об исполнителе, шагающем по горячим углям. Заявляется, что защита от сильного ожога дается властью духа над материей. На самом деле при успешной «прогулке» ступни защищает физика. Особенно важен тот факт, что, хотя поверхность углей очень горяча, ее теплопроводность очень мала. Если исполнитель идет умеренным шагом, прикосновение ступни такое кратковременное, что она проводит от углей очень мало энергии. Конечно, более медленная ходьба может вызвать ожог, так как более долгий контакт допустит передачу ступне тепла не от поверхности, а от внутренней части углей.

Если смочить ступни перед ходьбой, жидкость также сможет защитить их. Например, исполнитель мог пройти по сырой траве, перед тем как ступить на горячие уголья. Или его ноги могли быть просто потными из-за жара углей или возбуждения перед представлением. Когда исполнитель ступает на угли, тепло испаряет влагу на ступнях, и к коже передается меньше тепла. Кроме того, могут быть точки контакта, где жидкость подвергается пленочному кипению, что тоже дает защиту от горячих углей.

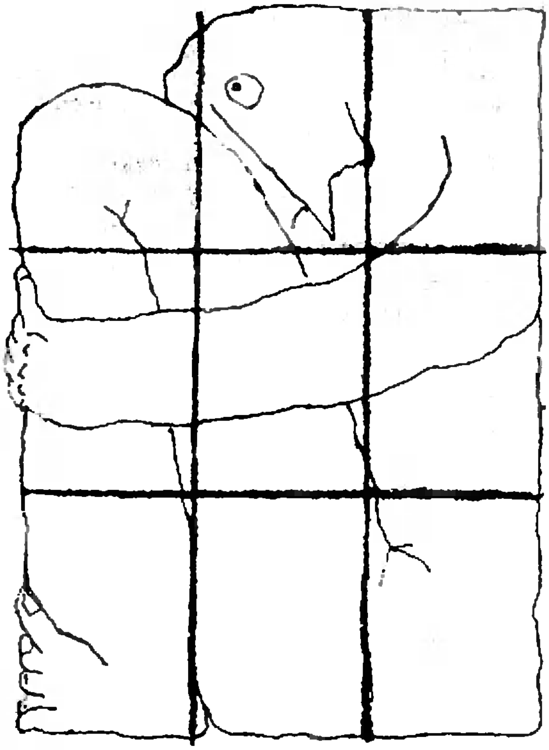
Я ходил по горячим углям пять раз. Четыре раза я достаточно боялся, и ноги были потными. Однако в пятый раз я счел мою безопасность само собой разумеющейся, и ноги были сухими. Ожоги, которые я получил, оказались сильными и очень болезненными. Ноги не заживали несколько недель.

Моя неудача могла быть вызвана отсутствием пленочного кипения на ступнях, но я пренебрег и дополнительным фактором безопасности. В предыдущие дни я из предосторожности прижимал к груди раннее издание этой книги*), чтобы укрепить мою веру в физику. Увы, в тот день, когда я так сильно обжегся, я забыл книгу.

Я долго доказывал, что последним из финальных экзаменов для получения ученой степени должна быть «ходьба по огню». Если кандидат на степень верит в физику так сильно, что он не обожжет ноги, председатель тут же вручает ему диплом. Это испытание будет гораздо более показательным, чем традиционные экзамены.

---

*) Имеется в виду книга: D. Halliday, R. Resnick „Fundamentals of Physics", Third edition extended, 1988 (John Willey & Sons, N. Y.).



Школа в „Кванте"

Математика 9—11

Мы решили несколько расширить тематику этой рубрики, помещая в ней статьи о вещах широко известных, но изучаемых разве лишь в математических школах и классах. Тем самым мы надеемся хотя бы отчасти компенсировать недостаток научно-популярной и учебной литературы для школьников. Статьей «Деление с остатком и сравнения по модулю» мы открываем эту новую серию публикаций.

Деление с остатком и сравнения по модулю

Третьего сентября 1990 года мне понадобилось узнать, каким днем недели будет 20 декабря 1991 года. Календаря у меня под рукой не было, поэтому пришлось заняться подсчетами. Я знал, что 3 сентября — понедельник, а с 3-го сентября 1990 года по 20-е декабря 1991 года проходит $27+31+30+20+365=473$ дня, т. е. 67 полных недель и еще 4 дня ($473=67\cdot7+4$). Следовательно, 20-е декабря 1991 года — пятница.

Возводя в квадрат многозначное число, ученик получил ответ 46 991 075. Учитель, заглянув в его тетрадку, сразу сказал: «Ответ неверен!» Как он это понял?

Упражнение 1. Подумайте, может ли квадрат целого числа оканчиваться цифрами 75.

Дальше мы увидим, что в основе решения и этой нехитрой задачи, и многих других лежат соображения делимости. Однако сначала нам нужно вспомнить, что такое деление с остатком.

Деление с остатком

Определение. *Разделить натуральное число a на натуральное число b с остатком значит записать a в виде $a=qb+r$, где q и r неотрицательные целые числа, причем $r<b$. Число q при этом называется частным, а r — остатком от деления a на b.*

На практике деление с остатком выполняют обычным способом, т. е. «делением углом». Например:

$$\begin{array}{r|l} -179 & 14 \\ \underline{14} & 12 \\ -39 & \\ \underline{28} & \\ 11 & \end{array}$$

Здесь сразу видны остаток 11 и частное 12: $179=12\cdot14+11$.

Заметим, что в данном определении мы не требуем, чтобы a было больше, чем b. Можно, например, разделить 5 на 7: $5=0\cdot7+5$. Вообще, если $a<b$, то $a=0\cdot b+a$, т. е. в этом случае $q=0$, $r=a$.

Замечание. Можно определить деление с остатком любого целого числа a на любое целое число $b\neq0$ так: *разделить a на b с остатком значит представить a в виде $a=qb+r$, где q — целое, а $0\leqslant r\leqslant|b|$.* Например, при $a=-15$, $b=7$: $-15=(-3)\cdot7+6$; при $a=-224$, $b=-9$: $-224=15\cdot(-9)+1$ и т. п.

Если остаток равен нулю, т. е. $a=qb$, говорят, что *a делится на b*.

Очень важно следующее простое наблюдение. *Если a и b делятся на c, то при любых целых k и l число $ka+lb$ делится на c.*

Задача 1. Числа $7n+1$ и $8n+3$ делятся на некоторое натуральное число $d\neq1$. Найдите d.

Решение. Поскольку $7(8n+3)-8(7n+1)=13$, число 13 делится на d, то $d=13$ (т. к. $d\neq1$, и 13 — простое число).

Упражнения

2. Разделите с остатком

а) 1931 на 17; б) -295 на 31;

в) -1005 на -98.

3. Число $17x+3y$ делится на 61. Докажите, что $8x+5y$ тоже делится на 61 (x и y — целые).

4. Найдите остатки от деления чисел

а) n на $n-1$ и на $n-2$;

б) n^2+n+1 на $n+1$ и $n+2$;

в) n^4+1 на $n+3$ ($n\geqslant80$).

5. Найдите все целые n, при которых будет целым число а) $\frac{n^2+1}{n-1}$; б) $\frac{n^5+3}{n^2+1}$.

Сравнения по модулю

Давайте сразу условимся, что все числа, о которых пойдет речь дальше, будут целыми, так что в последующем это не будет специально оговариваться. Рассмотрим еще одну задачу.

Задача 2. *На какую цифру оканчивается число 2^{999}?*

Решение. Выпишем последовательные степени двойки:

$$2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64,\dots$$

Легко видеть, что последние цифры этих чисел повторяются через 4, так что последняя цифра числа 2^n зависит только от того, какой остаток при делении на 4 дает показатель n. Поскольку $999=996+3=4\cdot249+3$, ответ в нашей задаче: 8.

В этом примере все множество показателей степени разбилось на 4 класса, состоящих из чисел n вида

$$4k,\ 4k+1,\ 4k+2,\ 4k+3.$$

Вообще, для любого натурального числа m все целые числа (не только положительные!) разбиваются на m классов. Каждый класс при этом состоит из чисел, дающих при делении на m одинаковые остатки.

Вот эти классы:

0) числа a вида $a=km$,

1) —»— a —»— $a=km+1$,

. . . .

$m-1$) —»— a —»— $a=km+m-1$.

Ясно, что любое число принадлежит одному из выписанных классов. При этом разность любых двух чисел из *одного* класса делится на m, а разность двух чисел из *разных* классов на m не делится.

Определение. *Если разность целых чисел a и b делится на натуральное число m, то говорят, что a и b сравнимы по модулю m.*

Записывается сравнимость чисел по модулю m так:

$$a\equiv b(\mathrm{mod}\ m).$$

Числа a и b сравнимы по модулю m тогда и только тогда, когда они принадлежат одному классу, т. е. дают одинаковые остатки при делении на m. Иначе говоря, $a\equiv b(\mathrm{mod}\ m)$ *означает, что $a=b+km$, где k — целое число.* Например, $27\equiv7(\mathrm{mod}\ 10)$, $78\equiv6(\mathrm{mod}\ 24)$, $6\equiv0(\mathrm{mod}\ 3)$, $25\equiv-4(\mathrm{mod}\ 29)$.

Упражнения

6. Докажите, что

а) $a^3\equiv a(\mathrm{mod}\ 6)$, б) $a^5\equiv a(\mathrm{mod}\ 5)$.

7. Докажите, что число

$\frac{a(a+1)\dots(a+k-1)}{k!}$ — целое.

8. Докажите, что $2^{100}\equiv3^{100}$ по модулям 5, 13, 211.

9. Докажите, что $11^{10}-1$ делится на 100.

10. Пусть $S(N)$ — сумма цифр числа N. Докажите, что $N\equiv S(N)$ по модулям 3 и 9.

11. Пусть $S(A)=S(5A)$. Докажите, что $A\equiv0(\mathrm{mod}\ 9)$.

12. Некоторое число записывается в десятичной системе счисления с помощью 1991 единицы и некоторого количества нулей. Может ли оно быть полным квадратом?

13. Пользуясь тем, что $10\equiv-1(\mathrm{mod}\ 11)$, докажите признак делимости числа на 11: число $a=a_na_{n-1}\dots a_0\equiv0(\mathrm{mod}\ 11)$ тогда и только тогда, когда $(-1)^na_n+(-1)^{n-1}a_{n-1}+\dots+a_0$ делится на 11.

Свойства сравнений

Сравнения по своим свойствам напоминают обычные равенства:

1) если $a\equiv b(\mathrm{mod}\ m)$ и $b\equiv c(\mathrm{mod}\ m)$, то $a\equiv c(\mathrm{mod}\ m)$.

Далее, если $a\equiv b(\mathrm{mod}\ m)$ и $c\equiv d(\mathrm{mod}\ m)$, то

2) $a+c\equiv b+d(\mathrm{mod}\ m)$,

3) $a-c\equiv b-d(\mathrm{mod}\ m)$,

4) $ac\equiv bd(\mathrm{mod}\ m)$,

т. е. сравнения, как и обычные равенства, можно складывать, вычитать и перемножать.

Докажем, например, свойство 4. Так как $a \equiv b$ и $c \equiv d$, то $a-b$ и $c-d$ делятся на m.

Из равенства $ac-bd=a(c-d)+d(a-b)$ получается, что число $ac-bd$ делится на m, т. е.

$$ac \equiv bd (\mathrm{mod}\ m).$$

Упражнение 14. Докажите остальные свойства сравнений.

Пусть $a \equiv b (\mathrm{mod}\ m)$. Из уже установленных свойств сравнений следует

5) для любого натурального k

$$a^k \equiv b^k.$$

Кроме того, в некоторых случаях сравнения можно сокращать на общий множитель левой и правой частей:

6) если $ac \equiv bc (\mathrm{mod}\ m)$, а числа c и m взаимно просты, то

$$a \equiv b (\mathrm{mod}\ m);$$

7) если $a \equiv b (\mathrm{mod}\ m)$, k — целое число и $a=ka_1$, $b=kb_1$, $m=km_1$, то

$$a_1 \equiv b_1 (\mathrm{mod}\ m_1).$$

Иначе говоря, обе части сравнения и модуль можно разделить на их общий делитель. Докажем свойство 6. Число $c(a-b)$ делится на m. Так как c и m взаимно просты, то число $a-b$ делится на m. Поэтому

$$a \equiv b (\mathrm{mod}\ m).$$

Упражнение 15. Докажите свойство 7.

Из сказанного следует, что *в любом алгебраическом выражении, полученном из целых чисел a, b, c, ..., z с помощью сложений, умножений и вычитаний можно заменить эти числа их остатками от деления на m, не изменяя при этом остатка, который дает это выражение при делении на m.*

Решим теперь следующую задачу.

Задача 3. *Найдите остаток от деления на 3 числа*

$$N=(1^2+1)(2^2+1)(3^2+1)...(1000^2+1).$$

Решение. Из сделанного выше замечания следует, что

$$N \equiv (1^2+1)^{333} \cdot (2^2+1)^{333} \cdot (3^2+1)^{333} \equiv \equiv 2^{333} \cdot 2^{333} \cdot 1^{333} \equiv 2^{666} \equiv \equiv (2^2)^{333} \equiv 1^{333} \equiv 1.$$

Задача 4. *При каких натуральных n число $8n+3$ делится на 13* (см. задачу 1)?

Решение. Запишем, пользуясь свойствами сравнений, следующую цепочку соотношений:

Пусть $8n+3 \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 13)$, тогда

$$8n \equiv -3 (\mathrm{mod}\ 13),$$
$$8 \times 8n \equiv -24 (\mathrm{mod}\ 13),$$
$$-n \equiv -24 \equiv -11 (\mathrm{mod}\ 13).$$

Откуда $n \equiv 11 (\mathrm{mod}\ 13)$.

Окончательно, $8n+3$ делится на 13, если и только если $n=13k+11$.

Упражнения

16. Найдите остатки от деления чисел

а) $2^{1991}+1$ на 17;

б) $(3^{20}+11)^{55}$ на 13.

17. Докажите, что число

а) $2^{50}+1$ делится на 125;

б) $2^{48}-1$ делится на 105.

в) $2^{3^n}+1$ делится на 3^{n+1} и не делится на 3^{n+2}.

18. Найдите все простые числа p, для которых $20p^2+1$ — тоже простое число.

19. Докажите, что число

а) $1^{1991}+2^{1991}+...+30^{1991}$ делится на 31;

б) $1^m+2^m+...+(n-1)^m$ делится на n при любых нечетных m и n.

20. При каких натуральных n число $20^n+16^n-3^n-1$ делится на 323.

21. Докажите, что число $5^{2n+1}+3^{n+2} \cdot 2^{n-1}$ при любом натуральном n делится на 19.

22. При каких n сократима дробь

$$\frac{15n+2}{14n+3}?$$

Китайская теорема об остатках

Рассмотрим m членов арифметической прогрессии

$$a,\ a+d,\ ...,\ a+(m-1) \cdot d, \qquad (*)$$

где a — целое число, а d — взаимно просто с m. Часто бывает очень полезной следующая

Теорема 1. *Среди чисел прогрессии (*) имеется ровно одно, делящееся на m.*

Доказательство. Разность k-го и l-го чисел (*), равная $d(k-l)$, не делится на m. Иначе оказалось бы, что $k-l$ делится на m, что невозможно, так как $|k-l|<m$.

Тем самым числа (*) попарно не сравнимы по модулю m и поэтому дают различные остатки при делении на m.

Следовательно, среди чисел (*) представлены все классы по модулю m, т. е. для каждого из остатков $0, 1, 2, \ldots, m-1$ ровно одно из чисел (*) сравнимо с ним по модулю m.

Мы доказали даже несколько более сильное утверждение, чем теорема 1.

Упражнения

23. Найдите все тройки простых чисел вида

$$p, p+2, p+4.$$

24. Найдите конечную арифметическую прогрессию с разностью 6 максимальной длины и состоящую из простых чисел.

25. Пятнадцать простых чисел образуют арифметическую прогрессию с разностью d. Докажите, что $d>30\,000$.

Теперь применим теорему 1 для доказательства так называемой *китайской теоремы об остатках*. Эта теорема была известна уже более 2000 лет тому назад в древнем Китае.

Теорема 2. *Пусть даны n попарно взаимно простых чисел $m_1, m_2, \ldots, m_n$ и n чисел $r_1, r_2, \ldots, r_n$ таких, что $0 \leqslant r_i \leqslant m_i - 1$ $(i=1, 2, \ldots, n)$. Тогда существует число N, дающее при делении на m_i остаток r_i.*

Иначе говоря $N \equiv r_i (\mathrm{mod}\ m_i)$ при всех $i=1, 2, \ldots, n$.

Доказательство. Применим индукцию по n. При $n=1$ утверждение теоремы очевидно. Пусть теорема справедлива при $n=k$. Тогда существует число M такое, что

$M \equiv r_i (\mathrm{mod}\ m_i)$ при $i=1, 2, \ldots, k$.

Пусть $d = m_1 m_2 \ldots m_{k-1}$.

Рассмотрим числа

$$M, M+d, M+2d, \ldots, M+(m_k-1)d.$$

Поскольку d взаимно просто с m_k, из доказательства теоремы 1 следует, что среди выписанных чисел найдется число N, дающее при делении на m_k остаток r_k. В то же время при делении на $m_1, m_2, \ldots, m_{k-1}$ число N дает остатки $r_1, r_2, \ldots, r_{k-1}$ соответственно.

Теорема доказана.

И, наконец, еще одна теорема.

Теорема 3. *Для любых попарно взаимно простых чисел $m_1, m_2, \ldots, m_n$ и остатков $r_1, r_2, \ldots, r_n$ по модулям $m_1, m_2, \ldots, m_n$ найдутся n последовательных чисел $a, a+1, \ldots, a+n-1$ таких, что $a \equiv r_1 (\mathrm{mod}\ m_1)$, $a+1 \equiv r_2 (\mathrm{mod}\ m_2)$, ..., $a+n-1 \equiv r_n (\mathrm{mod}\ m_n)$.*

Иначе говоря, для любых попарно взаимно простых модулей $m_1, m_2, \ldots, m_n$ найдутся n подряд идущих натуральных чисел, дающих соответственно любые наперед заданные остатки при делении на эти числа.

Доказательство. По китайской теореме об остатках существует такое a, что

$$a \equiv r_1 (\mathrm{mod}\ m_1),$$
$$a \equiv r_2 - 1 (\mathrm{mod}\ m_2),$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$a \equiv r_n - n + 1 (\mathrm{mod}\ m_n).$$

Но тогда числа $a, a+1, \ldots, a+n-1$ удовлетворяют условию теоремы.

Упражнения

25. Докажите, что а) среди любых десяти; б) любых шестнадцати последовательных натуральных чисел найдется число, взаимно простое с остальными.

в) верно ли утверждение задачи для любых 17 последовательных натуральных чисел.

26. Докажите, что для любого n существуют n последовательных натуральных чисел, каждое из которых делится на квадрат некоторого числа.

27. Существует ли в сутках момент, когда расположенные на общей оси часовая, минутная и секундная стрелки правильно идущих часов образуют попарно углы в 120°?

28. Найдите наименьшее натуральное число, дающее при делении на 2, 3, 5, 7 соответственно остатки 1, 2, 4, 6.

29. Найдите наименьшее четное число a, такое, что $a+1$ делится на 3, $a+2$ делится на 5, $a+3$ делится на 7, $a+4$ делится на 11, $a+5$ делится на 13.

Как решают сравнения

Если вы помните, решая задачу 4, мы нашли все целые n, для которых $8n+3$ делится на 13.

Другими словами, мы решили сравнение

$$8n+3 \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 13).$$

Теперь мы можем решить эту задачу в общем виде. Итак, пусть даны взаимно простые целые числа a и m.

Решим сравнение

$ax \equiv b (\mathrm{mod}\ m)$, где b — любое число.

По теореме 1 существует такое k, что $ak \equiv 1 (\mathrm{mod}\ m)$.

Умножив левую и правую части данного сравнения на k, получим

(Окончание см. на с. 49)

Калейдоскоп „Кванта"

Я принимаю, что во Вселенной... есть известное количество движения, которое никогда не увеличивается, не уменьшается, и, таким образом, если одно тело приводит в движение другое, то теряет столько своего движения, сколько его сообщает.

Р. Декарт

А так ли хорошо знакомо вам

количество движения ?

Декарт, судя по его высказываниям, понимал фундаментальное значение введенного им в XVII веке понятия количества движения — или импульса тела — как произведения массы тела на величину его скорости. И хотя он совершил ошибку, не рассматривая количество движения как векторную величину, сформулированный им закон сохранения количества движения выдержал с честью проверку временем. В начале XVIII века ошибка была исправлена, и триумфальное шествие этого закона в науке и технике продолжается по сию пору.

Как один из основополагающих законов физики, он дал неоценимое орудие исследования ученым, ставя запрет одним процессам и открывая дорогу другим. Взрыв, реактивное движение, атомные и ядерные превращения — везде превосходно работает этот закон. А в скольких самых обиходных ситуациях помогает разобраться понятие импульса, сегодня, мы надеемся, вы убедитесь сами.

Вопросы и задачи

1. Тело массой m брошено с начальной скоростью v_0 под углом α к горизонту. Чему равно приращение модуля импульса тела и модуль приращения импульса за время полета? Сопротивление воздуха не учитывать.

2. По изогнутой под прямым углом трубе течет вода. Действует ли вода на трубу? В каком направлении?

3. Мяч, летящий со скоростью v, ударяется в едущий ему навстречу со скоростью u автомобиль. Какой станет скорость мяча после упругого удара?

4. Можно ли разогнать парусную лодку, направляя на паруса поток воздуха из мощного вентилятора, находящегося в лодке? Что случится, если дуть мимо паруса?

5. «Горка» A с закрепленными на ней телами B и C покоится на гладкой горизонтальной поверхности. Сначала с «горки» соскальзывает тело B, после чего соскальзывает тело C. В каком направлении в конце концов поедет «горка»? Массы тел A, B и C одинаковы. Трением при движении всех трех тел пренебречь.

6. Мальчик может бросить камень с груженой баржи или с легкой надувной резиновой лодки. В каком случае камень полетит дальше?

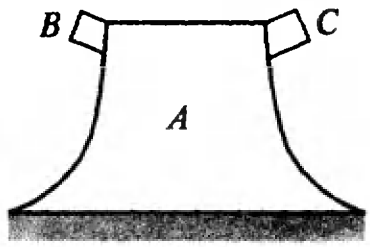
7. Ракета, запущенная вертикально вверх, взрывается в высшей точке своего подъема. При взрыве образуются три осколка. Докажите, что начальные скорости всех трех осколков лежат в одной плоскости.

8. Когда покоящийся шар приобретает бо́льшую скорость от удара другого такого же шара: при упругом или неупругом центральном ударе?

9. В неподвижный шар ударяется не по линии центров другой такой же шар. Под каким углом разлетятся шары, если они абсолютно упругие и абсолютно гладкие?

10. В каком направлении станет перемещаться аэростат, если по свисающей с него лестнице начнет подниматься человек с постоянной скоростью относительно лестницы?

11. Однородный стержень нижним концом касается гладкой горизонтальной поверхности. Верхний конец стержня подвешен



на нити так, что стержень образует с поверхностью некоторый угол. Нить пережигают. В какую сторону сместится нижний конец стержня, когда он упадет?

12. На абсолютно гладкой горизонтальной плоскости лежит обруч, на котором сидит жук. Какие траектории будут описывать жук и центр обруча, если жук поползет по обручу?

13. Будет ли увеличиваться скорость ракеты, если скорость истечения газа относительно ракеты меньше скорости самой ракеты, т. е. если вытекающий из сопла ракеты газ летит вслед за ракетой?

14. Можно ли, сидя на стуле и не касаясь пола ногами, проехать через комнату?

Микроопыт
Надуйте резиновый шарик и выпустите его из рук, не завязывая отверстие. Что произойдет при этом? Почему?

Любопытно, что...

...Декарт обосновывал принцип сохранения количества движения совершенством бога, «действующего с величайшим постоянством и неизменностью».

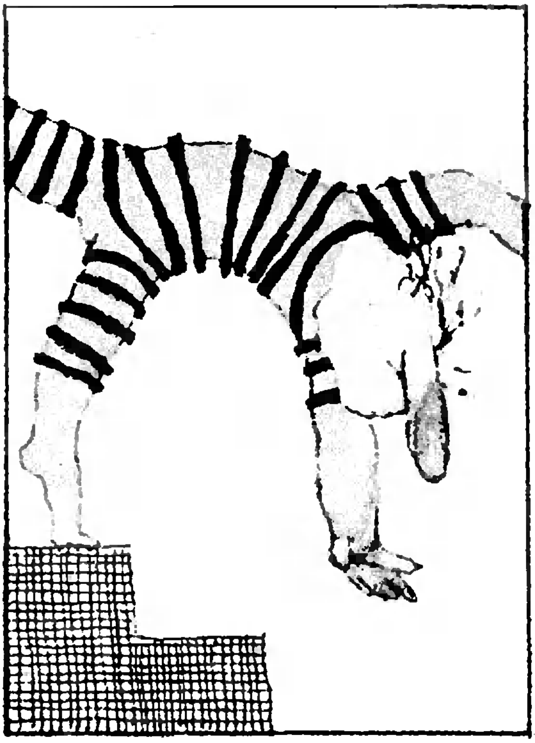
...до изобретения парохода существовал проект судна, основанный на реактивном принципе: запас воды на судне предполагалось выбрасывать с помощью сильного нагнетательного насоса в кормовой части, вследствие чего судно должно было двигаться вперед. Проект этот не был осуществлен, однако он сыграл известную роль в изобретении парохода.

...при неизменной скорости истечения газов из сопла выигрыш в скорости при той же массе горючего получается при использовании многоступенчатых ракет, когда отбрасываются баки, трубопроводы и двигатели отработавших ступеней. Однако до сих пор не существует выгодной конструкции, где бы ненужная масса ракеты отбрасывалась непрерывно.

...закон сохранения импульса позволяет «разыскать» и невидимые объекты, например, электромагнитные волны, излучаемые открытым колебательным контуром, или антинейтрино — субатомные частицы, не оставляющие следов в детекторах.

Что читать в «Кванте» о количестве движения
(публикации последних лет)

1. «О судьбе некоторых понятий механики» — 1986, № 5, с. 20;
2. «Волк, барон и Ньютон» — 1986, № 9, с. 16;
3. «Калейдоскоп «Кванта» — 1987, № 5, с. 32;
4. «Что такое центр масс» — 1988, № 3, с. 39;
5. «Соударение тел» — 1988, № 9, с. 30;
6. «Законы сохранения энергии и импульса» — 1989, № 4, с. 60;
7. «Системы отсчета в задачах механики» — 1990, № 2, с. 62.



Лаборатория „Кванта"

Слинки — шагающая пружинка

Д. ЧОКИН

В этой статье будет рассказано об одной удивительной игрушке, которую в Америке называют слинки (slinky). Это пружинка с очень малым коэффициентом упругости, диаметр ее витков — от 5 до 10 см, количество витков — от 50 до 100. При всей внешней простоте такую пружинку трудно сделать самому. Нужна особая сталь, прошедшая специальную термообработку, только тогда можно добиться малой упругости пружинки. А именно это свойство и позволяет проводить с ней интересные опыты, которые невозможны с обычной пружинкой.

Самое любопытное заключается в том, что слинки может спускаться по ступенькам лестницы (или по наклонной плоскости). Достаточно, установив слинки в вертикальном положении на краю ступеньки, подтолкнуть ее верхний конец в направлении нижней ступеньки, и слинки зашагает. Пружинка будет как бы перетекать с верхней ступеньки на нижнюю. Когда вся пружинка перетечет, верхний конец, описав в воздухе дугу, шагнет на следующую ступеньку, и движение продолжится (рис. 1).

Попробуем объяснить этот опыт. Очевидно, главная причина в том, что, вследствие своей малой жесткости, пружинка не успевает погасить горизонтальную составляющую скорости своего верхнего конца, и это позволяет ей перешагнуть (перевалиться) на следующую ступеньку. Такую «шагающую» пружинку можно уподобить автоколебательной системе, черпающей кинетическую энергию из потенциальной. Оценим некоторые динамические параметры слинки: время одного шага, отношение массы пружинки, участвующей в движении, к ее полной массе и др. С этой целью решим следующую задачу.

Свободно подвесим слинки за верхний конец (рис. 2) и найдем зависи-

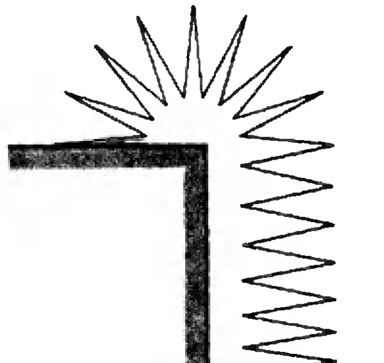


Рис. 1.

Диар Чокин написал эту статью еще будучи школьником (РФМШ, Алма-Ата). Сейчас он студент физического факультета МГУ.

мость линейной плотности пружинки, что пропорционально числу витков на единицу длины, от расстояния до нижнего конца. Рассмотрим некоторый участок пружинки. Пусть он приходится на n-й виток, считая от нижнего конца пружинки. Если длина этого витка равна Δx_n, то

$$\Delta k \Delta x_n = \Delta m n g,$$

где Δk — жесткость одного витка, а Δm — его масса. Тогда получаем, что средняя линейная плотность n-го витка равна

$$\lambda_n = \frac{\Delta m}{\Delta x_n} = \frac{\Delta k}{ng},$$

или, считая, что в пружинке N витков и ее общая жесткость k, —

$$\lambda_n = \frac{Nk}{ng}.$$

Теперь найдем расстояние от этого витка до нижнего конца пружинки. Поскольку $\Delta x_n = \Delta m n g / \Delta k$, искомое расстояние равно

$$x_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta m g}{\Delta k} i = \frac{\Delta m g}{\Delta k} \frac{n(n+1)}{2} \approx$$

$$\approx \frac{\Delta m g n^2}{2\Delta k} = \frac{Mg}{2k} \frac{n^2}{N^2},$$

где M — масса всей пружинки. (Интересно, что полная длина подвешенной пружины $L_0 = Mg/(2k)$ оказывается в два раза меньше длины, которую имела бы такая же невесомая пружина с подвешенным на конце грузом массой M.)

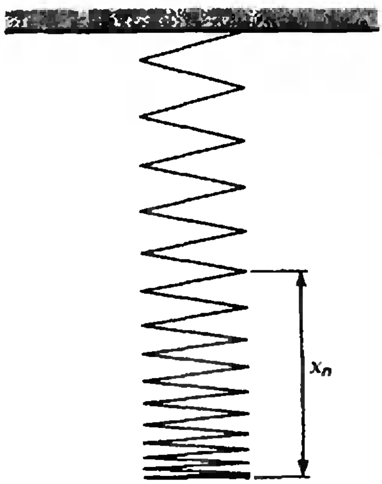


Рис. 2.

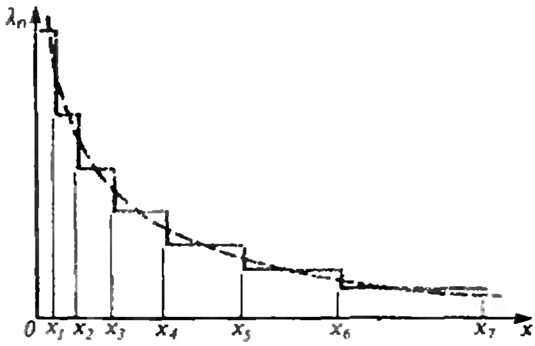


Рис. 3.

Сравнив полученные выражения для линейной плотности λ_n и расстояния x_n, найдем зависимость между ними:

$$\lambda_n = \frac{k}{g} \frac{N}{n} = \sqrt{\frac{Mk}{2gx_n}}.$$

Для удобства (нам это понадобится в дальнейшем) перейдем от дискретной записи распределения линейной плотности к непрерывной, взяв предельный случай бесконечного количества витков (см. рис. 3):

$$\lambda(x) = \sqrt{\frac{Mk}{2gx}}.$$

Теперь настало время оценить массу пружинки, участвующую в движении. Будем считать, что искомая часть эквивалентна свободно подвешенной пружинке, длина которой h (h — высота ступеньки). Тогда, используя последнюю формулу, оценим неизвестную массу:

$$m_0 = \int_0^h \lambda(x) dx = \int_0^h \sqrt{\frac{Mk}{2gx}} dx = \sqrt{\frac{2Mkh}{g}}$$

и отношение этой массы к полной:

$$\frac{m_0}{M} = \sqrt{\frac{2kh}{Mg}} = \sqrt{\frac{h}{L_0}},$$

Чем меньшая часть массы пружинки будет участвовать в движении, тем устойчивее она будет ходить. Поэтому для улучшения ходьбы пружинки следует, как видно из полученного отношения, уменьшить коэффициент упругости, увеличить массу пружинки, пускать пружинку с не очень высоких ступенек. И вообще, лучше делать это, скажем, на Юпитере — с целью увеличения ускорения свободного падения g. Для реальной пружинки, взяв $h=10$ см и $L_0=1$ м, получим $m_0/M\approx\approx 0{,}3$.

Чтобы определить время одного шага слинки, воспользуемся вторым законом Ньютона. Пусть начальная скорость верхнего витка v. Тогда

$$v\Delta m=F\Delta t,$$

где F — сила натяжения пружинки в верхней точке, Δm — масса пружинки, которая пришла в движение за время Δt. Если λ_0 — линейная плотность пружинки в месте начала движения, то $\Delta m=\lambda_0 v\Delta t$, и

$$\lambda_0 v^2=F.$$

Очевидно, что

$$\lambda_0=\sqrt{\frac{Mk}{2gh}},\ \text{а}\ F=m_0g=\sqrt{2Mgkh}.$$

Поэтому для скорости «разматывания» получаем

$$v=\sqrt{\frac{F}{\lambda_0}}=\sqrt{2gh}.$$

Пусть за время Δt «размоталась» часть пружинки массой $\Delta m=\lambda_0 v\Delta t$. Подставив значения λ_0 и v, имеем

$$\Delta t=\frac{\Delta m}{\sqrt{Mk}}.$$

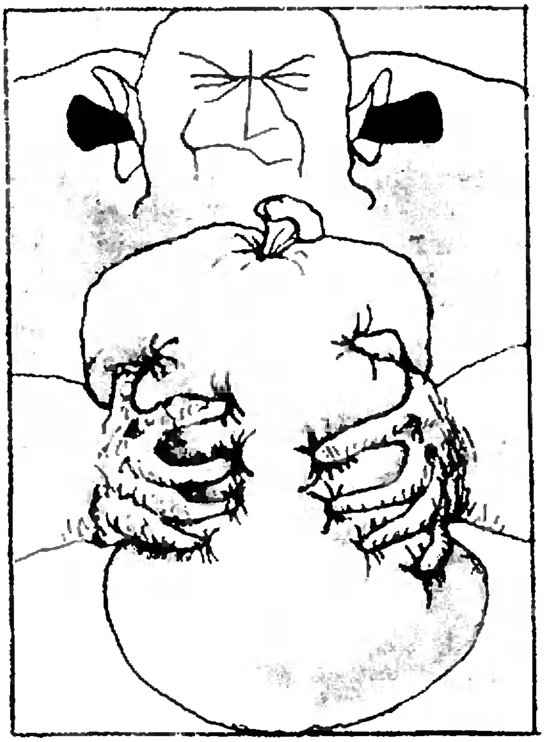
Откуда получаем время одного шага слинки:

$$T=\Sigma\Delta t_i=\frac{1}{\sqrt{Mk}}\Sigma\Delta m_i=\sqrt{\frac{M}{k}}=\sqrt{\frac{2L_0}{g}}.$$

Интересно, что время одного шага не зависит от высоты ступеньки и что это время одного порядка с периодом свободных колебаний пружинки и со временем падения тела с высоты L_0. Взяв значение L_0 равным, например, 1 м, получим $T\sim 0{,}5$ с, что хорошо подтверждается экспериментом.

Другой, не менее важный опыт с пружинкой — моделирование продольных механических волн. Для проведения этого опыта необходимо растянуть пружинку и один из ее витков сжать вдоль оси, тем самым сделав его началом распространения волны. По пружинке побежит волна сжатия и растяжения, отражаясь от ее концов. Интересный и полезный опыт. Его можно показывать в школе для наглядного представления продольных волн и исследования их свойств. Например, известно, что уменьшение плотности среды ведет к увеличению скорости продольных волн. В этом легко убедиться в опытах со слинки — достаточно немного ее растянуть, чтобы скорость волн заметно увеличилась.

Наверное, много еще интересных опытов можно провести с пружинкой, обладающей очень малой жесткостью, т. е. со слинки.



Практикум абитуриента

Работа и изменение энергии идеального газа

А. ШЕРОНОВ

В этой статье мы остановимся на некоторых особенностях тепловых процессов, в которых главным действующим лицом является идеальный газ.

Как известно, газ может совершать работу за счет внешнего источника теплоты или за счет своей внутренней энергии. Но при любом процессе выполняется основное соотношение термодинамики — закон сохранения энергии, или первый закон термодинамики. Запишем его в виде

$$Q=\Delta U+A$$

— подведенное к газу количество теплоты Q идет на изменение его внутренней энергии ΔU и совершение газом работы A против внешних сил.

Внутренняя энергия U идеального газа зависит только от температуры T и является функцией его состояния. Так, для одного моля одноатомного газа $U=3/2RT$, где R — универсальная газовая постоянная. Поэтому любое (как бесконечно малое, так и конечное) изменение внутренней энергии определяется лишь разностью температур конечного и начального состояний:

$$\Delta U=\frac{3}{2}R\Delta T$$

и не зависит от способа перехода от одного состояния к другому. Это остается справедливым и в том случае, если газ переводится из начального равновесного состояния в конечное равновесное состояние в результате неравновесного, необратимого процесса.

Элементарная, как ее иногда называют, работа ΔA по определению равна произведению давления p на малое изменение объема газа ΔV в двух соседних равновесных состояниях:

$$\Delta A=p\Delta V.$$

При конечном изменении объема от V_1 до V_2 в некотором обратимом процессе работа A численно равна площади под кривой зависимости давления газа от объема $p=p(V)$, ограниченной изохорами V_1 и V_2. Математически эта площадь равна

$$A=\int_{V_1}^{V_2}p(V)dV.$$

Для замкнутого цикла работа газа определяется площадью внутри кривых $p(V)$, образующих этот цикл. Работа газа при конечном изменении объема, как и работа газа в замкнутом цикле, зависит от вида функции $p(V)$.

Подведенное к газу в обратимом процессе количество теплоты Q можно выразить через теплоемкость газа C и малое изменение температуры ΔT известным соотношением

$$Q=C\Delta T.$$

Тогда первый закон термодинамики можно записать в виде

$$C\Delta T=\Delta U+p\Delta V.$$

Для того чтобы найти теплоемкость, нужно связать элементарную работу $p\Delta V$ с малой разностью температур ΔT двух соседних состояний рассматриваемого процесса. Это можно сделать с помощью уравнения состояния газа и уравнения процесса. Заметим, что теплоемкость одного и того же газа существенно зависит от вида процесса и может даже изменяться во время процесса.

Напомним основные характеристики часто встречающихся в задачах частных процессов.

В изохорическом процессе работа газом (или над газом) не производится. Нагревание или охлаждение газа приводит к соответствующему изменению его внутренней энергии:

$$\Delta U=Q=C_V\Delta T,$$

где C_V — это теплоемкость газа при постоянном объеме. В частности, для моля одноатомного газа $C_V=3/2R$.

В изотермическом процессе внутренняя энергия газа не меняется. При расширении одного моля газа от объема V_1 до объема V_2 при неизмененной температуре T_0 им совершается работа, которую можно найти по формуле

$$A=\int_{V_1}^{V_2} p(V)dV=\int_{V_1}^{V_2}\frac{RT_0}{V}dV=$$
$$=RT_0\ln\frac{V_2}{V_1}.$$

Из формулы для A видно, что работа газа на любом участке изотермы одинакова, если отношение конечного и начального объемов сохраняется постоянным. По закону сохранения энергии, подведенное к газу тепло равно совершенной газом работе. Поскольку температура газа не меняется, теплоемкость в изотермическом процессе оказывается бесконечно большой.

В адиабатическом процессе тепло к газу не подводится и не отводится. Теплоемкость газа в этом процессе по определению равна нулю. Работа совершается газом за счет изменения своей внутренней энергии:

$$A=-\Delta U.$$

Для моля одноатомного газа

$$A=-\frac{3}{2}R(T_2-T_1),$$

где T_2 и T_1 — температуры газа в конечном и начальном состояниях.

В изобарическом процессе с давлением p_0 работа газа при расширении от объема V_1 до объема V_2 равна

$$A=p_0(V_2-V_1).$$

Подведенное к газу количество теплоты идет на совершение работы A и увеличение внутренней энергии ΔU. Для моля одноатомного газа

$$A=R(T_2-T_1)\text{ и }\Delta U=\frac{3}{2}R(T_2-T_1).$$

Поэтому молярная теплоемкость газа в изобарическом процессе, ее обозначают C_p, оказывается равной $5/2R$. Нетрудно видеть, что C_V и C_p связаны соотношением

$$C_p=C_V+R.$$

Напомним, наконец, определение КПД замкнутого цикла, в котором внутренняя энергия газа не изменяется. По закону сохранения энергии, работа газа $A_ц$ в цикле равна разности количества теплоты Q_1, подведенного к газу, и количества теплоты Q_2, отведенного от газа. КПД цикла называется отношение

$$\eta=\frac{Q_1-Q_2}{Q_1}=\frac{A_ц}{Q_1}.$$

Иногда в задачах могут быть внешне простые участки зависимости $p=p(V)$, составляющие цикл, в ходе которых тепло как подводится, так и отводится. Если для такого участка найти итоговое подведенное или отведенное количество теплоты, то при определении КПД возникнет ошибка.

Особое место среди замкнутых обратимых циклов занимает известный цикл Карно. Он состоит из двух изотерм с температурами нагревателя T_1 и холодильника T_2, на которых подводится и отводится тепло, и двух адиабат. Только для цикла Карно

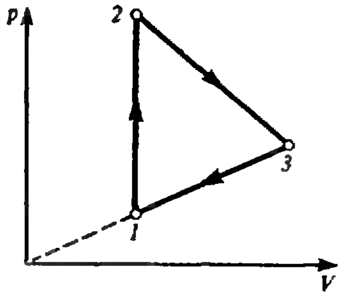


Рис. 1.

КПД может быть записан в виде

$$\eta=\frac{T_1-T_2}{T_1}.$$

Теперь перейдем к разбору некоторых конкретных характерных задач.

Задача 1. *Найдите работу, совершенную молем идеального газа в цикле, состоящем из двух участков линейной зависимости давления от объема и изохоры (рис. 1). Точки 2 и 3 лежат на изотерме, прямая 1—3 проходит через начало координат. Заданы температуры T_1 и $T_2=T_3$.*

Работа на изохоре *1—2* равна нулю. Работа на участке *2—3* равна площади трапеции. Обозначив $V_3/V_2=\beta$ и учтя, что $p_2V_2=p_3V_3=RT_2$, имеем

$$A_{23}=\frac{p_2+p_3}{2}(V_3-V_2)=$$

$$=\frac{p_2V_3-p_3V_2}{2}=RT_2\frac{\beta^2-1}{2\beta}.$$

Работа на участке *3—1* тоже равна площади трапеции. Поскольку прямая *1—3* проходит через начало координат и, следовательно, $p_1/V_1=p_3/V_3$, получаем

$$A_{31}=\frac{p_1+p_3}{2}(V_3-V_1)=$$

$$=\frac{p_3V_3-p_1V_1}{2}=\frac{R}{2}(T_2-T_1).$$

Из условия $p_1/V_1=p_3/V_3$ следует $T_1/V_1^2=T_1/V_2^2=T_2/V_3^2$. Поэтому работу A_{23} можно окончательно записать в виде

$$A_{23}=RT_2\frac{T_2/T_1-1}{2\sqrt{T_2/T_1}}=\frac{R}{2}\sqrt{\frac{T_2}{T_1}}(T_2-T_1).$$

Искомая работа в цикле равна

$$A_ц=A_{23}-A_{31}=\frac{R}{2}(T_2-T_1)\left(\sqrt{\frac{T_2}{T_1}}-1\right).$$

Заметим, что для участка прямой *2—3*, соединяющего точки изотермы, так же как и для самой изотермы, работа газа определяется лишь отношением объемов. Работа же газа вдоль участка произвольной прямой, проходящей через начало координат на диаграмме pV, определяется лишь разностью температур конечного и начального состояний.

Задача 2. *Найдите молярную теплоемкость газа в процессе с линейной зависимостью давления от объема.*

Запишем закон сохранения энергии в виде

$$C\Delta T=C_V\Delta T+p\Delta V.$$

По условию $p=\alpha V+\beta$, где α и β — константы. С учетом уравнения состояния газа находим

$$RT=\alpha V^2+\beta V.$$

Отсюда найдем связь между малым изменением температуры ΔT и элементарной работой $p\Delta V$:

$$R\Delta T=(2\alpha V+\beta)\Delta V.$$

Тогда окончательно для искомой теплоемкости получаем

$$C=C_V+\frac{p\Delta V}{\Delta T}=C_V+R\frac{\alpha V+\beta}{2\alpha V+\beta}.$$

Видно, что теплоемкость переменная и при отрицательном угловом коэффициенте прямой α может менять свой знак. Это означает, что с такими участками следует обращаться аккуратно (например, в задачах, где требуется найти КПД). Читателю рекомендуется самостоятельно проследить за изменением теплоемкости в зависимости от местоположения участка на плоскости pV. Мы же ограничимся замечанием, что для произвольной прямой, проходящей через начало координат ($\beta=0$), теплоемкость постоянна и равна $C_V+R/2$

Задача 3. *Моль идеального одноатомного газа из начального состояния 1 с температурой $T_1=100$ К, расширяясь через турбину в пустой сосуд, переходит в состояние 2, совершая некоторую работу A_{12}. Этот переход происходит без подвода либо отвода тепла. Затем газ сжимают в двух процессах, возвращая в исходное состояние.*

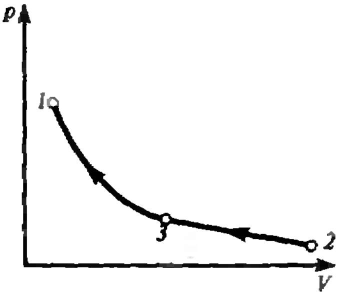


Рис. 2.

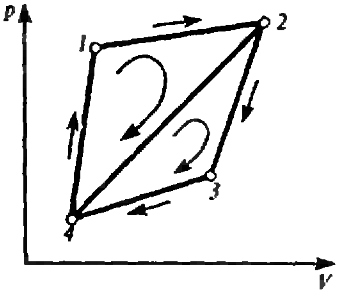


Рис. 3.

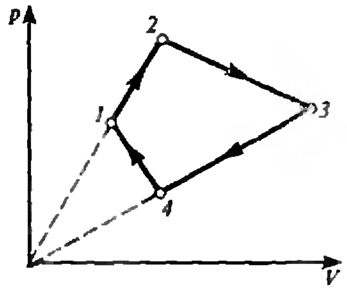


Рис. 4.

Сначала сжатие происходит в процессе 2—3 с линейной зависимостью давления от объема, а затем — в адиабатическом процессе 3—1 (рис. 2). Найдите работу, совершенную газом при расширении через турбину в переходе 1—2, если в процессе сжатия 2—3—1 над газом совершена работа $A=1090$ Дж. Известно, что $T_2=T_3$, $V_2=2V_3$.

Процесс расширения газа через турбину в пустой сосуд неравновесный, так что всей массе газа в любой момент нельзя приписать некоторое одинаковое давление и одинаковую температуру. Однако если начальное и конечное состояния равновесны, то на основании закона сохранения энергии можно утверждать, что газ совершает работу за счет изменения своей внутренней энергии:

$$A_{12}=-(U_2-U_1)=\frac{3}{2}R(T_1-T_2).$$

По условию, работа по сжатию газа равна

$$A=A_{13}+A_{32}=\frac{3}{2}R(T_1-T_3)+$$
$$+RT_2\frac{(V_2/V_3)^2-1}{2V_2/V_3}=\frac{3}{2}R(T_1-T_2)+\frac{3}{4}RT_2.$$

Здесь нами использованы равенства $T_2=T_3$ и $V_2/V_3=2$ и выражение для работы на участке 2—3 из задачи 1. Из полученного выражения находим температуру T_2, а затем и работу A_{12}:

$$A_{12}=2A-\frac{3}{2}RT_1\approx 935 \text{ Дж}.$$

Задача 4. *КПД цикла 1—2—4—1, состоящего из трех участков линейной зависимости давления от объема (рис. 3), равен η_1. КПД аналогичного цикла 2—3—4—2 равен η_2. Найдите КПД цикла 1—2—3—4—1. Все участки линейной зависимости имеют положительные угловые коэффициенты.*

На всех участках температура является монотонной функцией объема, т. е. либо растет, либо убывает. С другой стороны, можно показать (см. задачу 2), что на каждом участке теплоемкость хотя и изменяется по величине, но не меняет своего знака. Это означает, что на каждом участке тепло либо подводится, либо отводится. Для соответствующих циклов имеем

$$\eta_1=1-\frac{Q_{24}}{Q_{12}+Q_{41}},$$

$$Q_{12}+Q_{41}=Q_{24}\frac{1}{1-\eta_1},$$

$$\eta_2=1-\frac{Q_{23}+Q_{34}}{Q_{42}},$$

$$Q_{23}+Q_{34}=Q_{42}(1-\eta_2).$$

Искомый КПД

$$\eta=1-\frac{Q_{23}+Q_{34}}{Q_{41}+Q_{12}}=\eta_1+\eta_2-\eta_1\eta_2.$$

Упражнения

1. Найдите работу моля идеального газа в цикле, состоящем из четырех участков линейной зависимости давления от объема (рис. 4). Вершины цикла лежат на двух изотермах с заданными температурами T_1 и T_2. Прямые 1—2 и 3—4 проходят через начало координат, $V_2=V_4$.

2. Моль одноатомного идеального газа из начального состояния 1 с температурой $T_1=100$ К, расширяясь через турбину в пустой сосуд, совершает некоторую работу и переходит в состояние 2. Этот процесс происходит без подвода либо отвода тепла. Затем газ сжимают в процессе 2—3 линейной зависимости

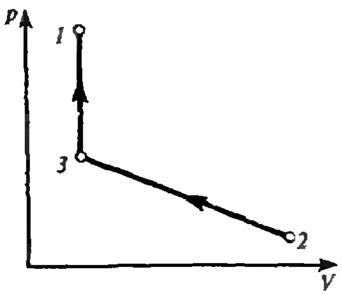


Рис. 5.

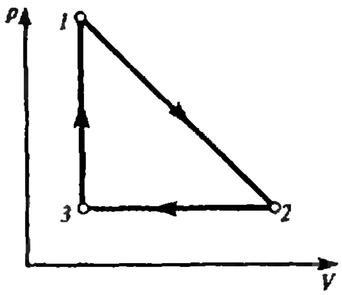


Рис. 6.

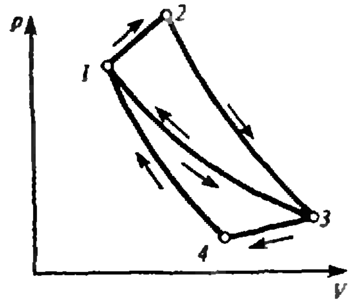


Рис. 7.

давления от объема и, наконец, по изохоре 3—1 возвращают в исходное состояние (рис. 5). Найдите работу, совершенную газом при расширении через турбину в переходе 1—2, если в процессах 2—3—1 к газу в итоге подведено количество теплоты $Q=72$ Дж. Известно, что $T_2=T_3$ и $V_2=3V_1$.

3. Моль идеального газа совершает замкнутый цикл, состоящий из процесса линейной зависимости давления от объема, изобары и изохоры (рис. 6). Найдите количество теплоты, отведенное от газа на участках, где его температура уменьшается. Известно, что $T_1=T_2$ и $p_1=4p_3$. Направление обхода указано стрелками. Температуру T_1 считать известной.

4. КПД цикла 1—2—3—1 равен η_1, цикла 1—3—4—1 — η_2. Найдите КПД цикла 1—2—3—4—1, если участки 2—3 и 4—1 — адиабаты, 1—3 — изотерма, 1—2 и 3—4 — прямые с положительными угловыми коэффициентами (рис. 7).

Деление с остатком и сравнения по модулю

(Начало см. на с. 36)

$$(ak)n\equiv n\equiv bk(\mathrm{mod}\ m),$$

откуда сразу получаем

$$n=bk+ml,$$

где l — произвольное целое число.

Возникает вопрос, как в конкретной ситуации найти k?

Для не слишком больших m эта задача решается достаточно просто (простым подбором). Об общем решении этой и многих других задач мы поговорим в следующей статье.

Задача 5. *Решите сравнение*

$$32n\equiv 7(\mathrm{mod}\ 37).$$

Решение. Поскольку $32\equiv\equiv -5(\mathrm{mod}\ 37)$, приходим к сравнениям

$$5n\equiv -7\equiv 30(\mathrm{mod}\ 37)$$

или

$$n\equiv 6(\mathrm{mod}\ 37)$$

К решению сравнений сводится задача о решении в целых числах линейных уравнений с целыми коэффициентами.

Задача 6. *Найдите все пары целых чисел x, y, удовлетворяющих уравнению $7x-23y=131$.*

Решение. Поскольку $23\equiv\equiv 2(\mathrm{mod}\ 7)$, получаем сравнения $2y\equiv\equiv -131(\mathrm{mod}\ 7)$ или $2y\equiv 9\equiv\equiv 2(\mathrm{mod}\ 7)$, откуда $y\equiv 1(\mathrm{mod}\ 7)$.

Итак $y=7k+1$, где k — целое число. Теперь без труда находим x:

$$7x-23(7k+1)=131,$$

откуда

$$7x=154+23\cdot 7k,$$

т. е.

$$x=22+23k.$$

В заключение предлагаем вам решить несколько упражнений.

Упражнения

30. Решите сравнения
а) $17x\equiv 19(\mathrm{mod}\ 37)$,
б) $147x\equiv 63(\mathrm{mod}\ 29)$.

31. Решите в целых числах уравнения
а) $7x+8y=1$,
б) $13x-15y=16$,
в) $257x+18y=175$.

32. Решите в целых числах систему уравнений

$$\begin{cases}3x+5y-7z=1,\\ 4x+9y+11z=2.\end{cases}$$

А. Егоров

МУЗЫКА, ЗВУЧАЩАЯ В КРОВИ

(фантастический рассказ)

Г. БИР

— Дальше я смешал лейкоциты со своей кровью, набрал в шприц и ввел все это себе обратно.— Он застегнул верхнюю пуговицу рубашки и неуверенно улыбнулся.— Я запрограммировал их на все, что только можно, общаясь с ними на самом высоком уровне, который допускают энзимы и тому подобное. После чего они зажили своей жизнью.

— Ты запрограммировал их и плодиться и размножаться? Становиться лучше? — повторил я его фразу.

— Я думаю, они развили кое-какие характеристики, заложенные в биочипы еще на стадии кишечных бактерий. Лейкоциты уже могли общаться друг с другом, выделяя в окружающую среду химически закодированные участки памяти. И наверняка они нашли способы поглощать другие типы клеток либо преобразовывать их, не убивая.

— Ты сошел с ума.

— Но ты сам видел изображение на экране! Эдвард, меня с тех пор не берет ни одна болезнь. Раньше я простужался постоянно, зато теперь чувствую себя как нельзя лучше.

— Но они у тебя внутри и постоянно что-то находят, что-то меняют...

— И сейчас каждая группа не глупее тебя или меня.

— Ты действительно ненормальный.

Он пожал плечами.

— Короче, меня вышибли. Решили, видимо, что я попытаюсь отомстить за то, как они расправились с моей работой. Поэтому меня выгнали из лаборатории, и до сего момента мне не представлялось настоящей возможности узнать, что происходит в моем организме. Три месяца уже прошло.

— И ты...— Я едва поспевал за перегоняющими друг друга догадками.— Ты сбросил вес, потому что они улучшили у тебя жировой обмен. Кости стали прочнее, позвоночник полностью перестроен...

— У меня никогда не болит теперь спина, даже если я сплю в очень неудобной позе.

— Сердце у тебя тоже выглядит не так.

— Про сердце я не догадывался,— сказал он, внимательно разглядывая изображение на экране.— А насчет жира... Об этом я думал. Они вполне могли улучшить у меня обмен веществ. В последнее время я никогда не чувствую себя голодным. Привычки в еде у меня не изменились настолько сильно — по-прежнему хочется того, чего и всегда хотелось,— но почему-то я ем только полезные продукты. Видимо, они еще не поняли, что представляет собой мой мозг. Они освоили железистую систему, но пока не осознали глобальной картины, если ты понимаешь, что я имею в виду. Они еще не знают, что я — это я. А вот что такое репродуктивные органы, усвоили просто замечательно.

Я взглянул на экран и отвел глаза.

— Нет, внешне все выглядит нормально,— он захихикал.— Но как, ты думаешь, я подцепил эту красотку Кандис? Она рассчитывала просто на одноразовое приключение с технарем. Я и тогда уже неплохо выглядел: без загара, но уже постройнел и одевался весьма прилично. Ей, видишь ли, никогда раньше не попадался технарь, ну и она решила попробовать ради смеха... Но мои маленькие гении не давали нам спать чуть не до утра, и с каждым разом они становились все умнее и умнее. Я был словно в лихорадке.

Улыбка исчезла с его лица.

— Но однажды ночью я почувствовал, как у меня по всей коже бегают мурашки. Я здорово тогда напугался и решил, что эксперимент выходит из-под контроля. Кроме того, меня беспокоило, что может произойти, когда они преодолеют гематоэнцефалический барьер и узнают обо мне, о настоящих функциях клеток головного мозга. Поэтому я начал кампанию сдерживания. Насколько я понимал, они пытались проникнуть в кожу, потому что по поверхности прокла-

Продолжение. См. «Квант» № 5.

дывать коммуникационные каналы гораздо легче, чем устанавливать цепи через органы, мускулы и сосуды или в обход их. По коже получалось проще. Пришлось купить кварцевую лампу...— Тут он перехватил мой удивленный взгляд.— В лаборатории мы разрушали белок в биочипах, подвергая их ультрафиолетовому облучению, а я чередовал лампу дневного света с кварцевой. В результате они не лезут на поверхность, а я получаю отличный загар.

— Ты еще можешь заполучить рак кожи,— добавил я.

— Думаю, они сами сделают все, что нужно, чтобы меня уберечь. Как полицейские патрули.

— Ладно. Я тебя обследовал, ты рассказал мне историю, в которую трудно поверить... но чего ты теперь от меня хочешь?

— Я не настолько беззаботен, как могло показаться, Эдвард. Меня по-прежнему не оставляет беспокойство, и я хотел бы найти какой-нибудь способ ограничить их прежде, чем они узнают о моем мозге. Ты сам подумай: их теперь триллионы, и каждый не глупее меня. Они в определенной степени сотрудничают, так что я, возможно, умнейшее существо на планете, но на самом деле у них еще все впереди. Я бы не хотел, чтобы они захватили надо мной власть.— Он рассмеялся, и у меня по спине пробежал неприятный холодок.— Или украли душу... Поэтому я прошу тебя подумать над каким-нибудь способом ограничить их. Может быть, этих маленьких чертенят можно поморить голодом? Подумай.— Он вручил мне листок бумаги со своим адресом и телефоном, затем подошел к клавиатуре, убрал изображение с экрана и стер данные обследования.— Пока никто, кроме тебя, ничего не должен знать. И пожалуйста... поторопись.

Ушел Верджил только в три часа ночи. Перед этим я взял у него кровь на анализ, затем пожал его влажную, дрожащую ладонь, и он в шутку предупредил меня, чтобы я не принимал образцы внутрь.

Прежде чем уйти домой самому, я заложил кровь на анализ, результаты которого были готовы уже на следующий день. Я получил их во время перерыва на ленч, затем все уничтожил. Проделал я это совершенно механически, словно робот. Лишь через пять дней и почти столько же бессонных ночей я принял увиденное. Кровь его оказалась вполне нормальной, за исключением того, что машина выявила заражение: высокий уровень лейкоцитов — белых кровяных клеток — и гистаминов. На пятый день я наконец поверил.

Гэйл вернулась домой раньше меня, но в тот вечер была моя очередь готовить ужин. Она поставила на проигрыватель один из детсадовских дисков и продемонстрировала мне образцы видеокомпьютерной живописи, которые создавали ее дошкольники. Я молча смотрел. Ужин тоже прошел в тишине.

Ночью мне приснилось сразу два сна — видимо, признак того, что я наконец принял факты. Во время первого, от которого я постоянно ворочался и скомкал всю простыню, мне привиделось разрушение планеты Криптон, родного мира Супермена, где погибали в огне миллиарды супергениев. Скорее всего этот кошмар навеяла стерилизация образцов крови, которые я взял у Верджила.

Второй сон оказался хуже. Мне снилось, как огромный город Нью-Йорк насилует женщину. В конце концов она родила множество маленьких зародышей-городков, завернутых в полупрозрачную пленку и залитых кровью после трудных родов.

На утро шестого дня я позвонил Верджилу. Он ответил после четвертого гудка.

— У меня есть кое-какие результаты,— сказал я.— Ничего окончательного, но я хотел бы с тобой поговорить. Не по телефону.

— Хорошо,— ответил он, и в его голосе мне послышалась усталость.— Я пока сижу дома.

Квартира Верджила находилась в шикарном высотном доме на берегу озера. Я поднялся к нему на лифте, разглядывая под рекламную болтовню голограммы с изображением товаров, свободных квартир и хозяйки здания, обсуждавшей общественные мероприятия на текущей неделе.

Верджил открыл дверь и жестом пригласил меня внутрь. Он был в клетчатом халате с длинными рукавами и домашних шлепанцах. В руке он держал незажженную трубку. Он молча прошел в комнату и сел в кресло; пальцы его вертели трубку, не переставая.

— У тебя инфекция,— произнес я.

— Да?

— Это все, что я смог узнать из анализов. У меня нет доступа к электронным микроскопам.

— Я не думаю, что это на самом деле инфекция,— сказал он.— В конце концов, это мои же собственные клетки.

Может быть, что-то еще... Какой-нибудь признак их присутствия, их перемен. Едва ли можно ожидать, что нам сразу все станет понятно.

Я снял пальто.

— Слушай, я начинаю за тебя беспокоиться...

Остановило меня выражение его лица — странное лихорадочное блаженство. Прищурив глаза, Верджил смотрел в потолок и морщил губы.

— Ты что — накачался? Балдеешь? — спросил я.

Он помотал головой из стороны в сторону, потом кивнул, очень медленно.

— Я слушаю,— сказал он.

— Что?

— Не знаю. Это не совсем звуки... Но что-то вроде музыки... Сердце, кровеносные сосуды, течение крови по артериям и венам. Деятельность... Музыка, звучащая в крови...— Он взглянул на меня грустными глазами.— Ты почему не на службе?

— У меня сегодня свободный день. А Гэйл работает.

— Можешь остаться?

— Видимо, да,— сказал я, пожимая плечами, потом обвел квартиру подозрительным взглядом, выискивая горы окурков или бумажные пакетики от наркотиков.

— Я не под балдой, Эдвард,— произнес он.— Может быть, я не прав, но мне кажется, происходит что-то очень большое и важное. Думаю, они начали понимать, кто я есть.

Я сел напротив Верджила, пристально его разглядывая. Он, похоже, совсем меня не замечал. Какой-то внутренний процесс захватил его целиком. Когда я попросил чашку кофе, он лишь махнул рукой в сторону кухни. Вскипятив воду, я достал из шкафа банку растворимого кофе, потом вернулся с чашкой в руках на свое место. Верджил сидел с открытыми глазами, покачивая головой.

— Ты всегда знал, кем тебе хочется стать, да? — спросил он.

— Более-менее.

— Гинеколог... Только верные шаги по жизни, ни одного — в сторону... А я всегда жил по-другому. У меня были цели, но я не знал направления. Это как карта без дорог, одни только географические точки. И мне на все было наплевать, на всех, кроме себя самого. Даже на науку. Для меня это просто средство... Я вообще удивляюсь, что добился таких значительных результатов... Даже своих родителей я ненавидел.

Неожиданно он схватился за подлокотники кресла.

— Тебе плохо? — встревожился я.

— Они со мной разговаривают,— ответил он и закрыл глаза.

Около часа он лежал без движения, как будто спал. Я проверил пульс — ровный, наполненный, потрогал его лоб — чуть холоднее, чем следовало бы, потом пошел и приготовил себе еще кофе. Когда Верджил открыл наконец глаза, я, не зная чем себя занять, перелистывал журнал.

— Трудно представить себе, как течет для них время,— произнес он.— Всего три или четыре дня у них ушло на то, чтобы понять наш язык и ключевые аспекты нашей цивилизации. Теперь они продолжают знакомиться со мной. Прямо во мне. Прямо сейчас.

— Как это?

Верджил сказал, что несколько тысяч исследователей подключились к его нейронам, но подробностей он и сам не знал.

— Они, вероятно, действуют очень эффективно,— добавил он.— И пока еще не причинили мне никакого вреда.

— Нужно доставить тебя в больницу.

— А что они там смогут сделать? Ты, кстати, придумал какой-нибудь способ ограничить моих умников? Я хочу сказать, это все же мои клетки.

— Я думал об этом. Мы можем заморить их голодом. Нужно только найти различие в метаболизме...

— Я не уверен, что мне хочется избавиться от них совсем,— сказал Верджил.— Они не причиняют мне никакого вреда.

— Откуда ты знаешь?

Он покачал головой, потом поднял палец и замер.

— Тихо! Они пытаются понять, что такое пространство. Им это нелегко. Расстояния они определяют по концентрациям химических веществ. Размерность для них — это как сильный или слабый привкус.

— Верджил...

— Слушай! И думай, Эдвард,— он заговорил возбужденным тоном.— Наблюдай! Во мне происходит что-то значительное. Они общаются друг с другом через жидкости организма, и химические сигналы проникают даже сквозь мембраны. Они там мастерят что-то новое, может быть, вирусы, чтобы переносить данные, хранящиеся в цепях нуклеиновых кислот. Кажется, они имеют в виду РНК... Похоже на правду. Я их так и программировал... Но еще и плазматические структуры... Возможно, именно это твои машины и выделили как признак инфекции — их переговоры у меня в крови, информационные пакеты... Химические характеристики других особей. Равных. Начальников. Подчиненных.

— Верджил, я внимательно слушаю, но мне действительно кажется, что тебе следует лечь в больницу.

— Это моя свадьба, Эдвард,— сказал он.— Я — их вселенная. Они поражены новыми открывшимися горизонтами...

Верджил снова умолк. Я присел на корточки рядом с его креслом и закатал рукав халата. Вся рука у него была словно исчерчена крест-накрест белыми линиями. Я уже собрался вызывать машину скорой помощи, когда он вдруг встал и потянулся.

— Ты когда-нибудь задумывался,— спросил он,— сколько клеток мы убиваем каждый раз, когда делаем даже простое движение?

— Я вызову машину,— сказал я.

— Нет,— произнес он твердо.— Я же сказал, что я не болен. И я хочу иметь возможность распоряжаться самим собой. Знаешь, что они сделают со мной в больнице?.. Это как если бы пещерные люди принялись чинить компьютер тем же способом, каким они чинят свои каменные топоры. Фарс...

— Тогда какого черта я здесь делаю? — спросил я, разозлившись.— Ведь я ничем не могу тебе помочь. Я такой же пещерный человек.

— Ты друг,— произнес Верджил, взглянув мне в глаза, и у меня возникло ощущение, что в мою сторону смотрит не только он один.— Ты мне нужен для компании.— Он рассмеялся.— Хотя на самом деле я отнюдь не одинок.

В течение двух последующих часов он расхаживал по квартире, прикасался к вещам, выглядывал в окна, потом медленно, неторопливо приготовил ленч.

— А знаешь, они действительно могут ощущать свои собственные мысли,— сказал он около полудня.— Я имею в виду цитоплазму. Судя по всему, она имеет собственную волю, своего рода подсознательную жизнь — в отличие от разума, который клетки обрели совсем недавно. Они слышат нечто похожее на химический «шум» отделяющихся и возвращающихся на место молекул.

В два часа я позвонил Гэйл и сказал, что буду поздно. Меня буквально трясло от напряжения, но я старался говорить спокойно.

— Помнишь Верджила Улэма? Я сейчас у него.

— Все в порядке? — спросила она. Да уж куда там...

— Все отлично,— ответил я.

Верджил заглянул в комнату, когда я попрощался с Гэйл и положил трубку.

— Это целая культура! — провозгласил он.— Они постоянно купаются в море информации. И постоянно вносят туда что-то новое. Получается своего рода «гештальт». Строжайшая иерархия. За клетками, которые взаимодействуют с другими неправильно, они высылают особые фаги. Специально изготовленные вирусы, предназначенные для конкретных клеток или групп. Против них нет абсолютно никакой защиты. Вирус протыкает клетку, она лопается, взрывается и растворяется. Но это не тирания. Я думаю, что на самом деле у них гораздо больше свободы, чем при демократическом устройстве. В том смысле, что они так сильно отличаются друг от друга. Ты можешь себе это представить? Они отличаются друг от друга даже больше, чем мы.

— Подожди,— сказал я, взяв его за плечи.— Верджил, ты слишком много и сразу на меня навалил. Мне это больше не под силу. Я ничего не понимаю и не очень верю.

— Даже сейчас?

— Ладно. Допустим, ты даешь мне э-э-э.. верную интерпретацию. Честную. И все это правда. А ты не задумывался о последствиях? Что все это означает и к чему может привести?

Он прошел на кухню, налил стакан воды, вернулся и встал рядом со мной. Детская увлеченность на его лице сменилась трезвой озабоченностью.

— Я всегда плохо представлял себе будущее.

— А тебе не страшно?

— Было страшно. Но сейчас я не уверен.— Он нервно подергал пояс своего халата.— Знаешь, я не хотел бы, чтобы ты думал, будто я действовал в обход тебя, через голову или еще как, но вчера я встретился с Майклом Бернардом. Он меня обследовал в своей частной клинике, взял образцы на анализы. Сказал, чтобы я прекратил облучение кварц-лампой. Сегодня утром, прямо перед тобой, он мне позвонил и сообщил, что все подтверждается. Но просил никому ничего не говорить.— Верджил замолчал, и на лице его снова появилось мечтательное, самоуглубленное выражение.— Целые города из клеток... Эдвард, они проталкивают сквозь ткани похожие на фимбрии каналы, чтобы распространять информацию...

— Прекрати! — не выдержал я.— Что там еще подтверждается?

— Как сказал Бернард, у меня в организме обнаружились «крайне увеличенные макрофагоциты». И он подтвердил анатомические изменения. Так что мы с тобой на этот счет не заблуждаемся.

— Что он собирается делать?

— Не знаю. Думаю, он сможет убедить руководство «Генетрона» возобновить работы в моей лаборатории.

— Ты этого хочешь?

— Дело не только в лаборатории. Сейчас я тебе покажу. Перестав пользоваться лампой, я изменился еще сильнее.

Он расстегнул халат и сбросил его на пол. Все тело у него было расчерчено белыми пересекающимися линиями. На спине вдоль позвоночника эти линии уже начали образовывать твердый гребень.

— Боже правый! — вырвалось у меня.

— Еще немного — и мне уже нельзя будет появляться нигде, кроме лаборатории. В таком виде невозможно бывать на людях. А в больнице, как я и говорил, просто не поймут, что со мной делать.

— Но ты... Ты же можешь переговорить с ними, сказать, чтобы они действовали не так быстро,— предложил я, понимая, что произношу весьма странные вещи.

— Да, могу. Но они не обязательно меня послушаются.

— Я думал, ты для них бог или нечто вроде этого.

— Те, кто подключился к моим нейронам, на самом деле не очень важные фигуры. Просто исследователи или что-то в этом духе. Они знают о моем существовании, знают, кто я такой, но это не означает, что они убедили тех, кто стоит на верхних ступенях иерархической лестницы.

— У них идут дебаты?

— Похоже на то. Однако все не так плохо, как тебе кажется. Если вновь откроют мою лабораторию, у меня будет и дом, и рабочее место.— Он выглянул в окно, словно высматривал кого-то внизу.— У меня больше никого нет. Кроме них. И они ничего не боятся, Эдвард. Никогда в жизни я не чувствовал ни с кем такого родства.— Снова блаженная улыбка.— Я в ответе за них. Я им как мать.

— Но ты же не знаешь, что они будут делать дальше.

Он покачал головой.

— В самом деле, Верджил. Ты говорил, что это цивилизация...

— Тысяча цивилизаций!

— Тем более. А цивилизации, как известно, нередко кончают плохо. Войны, загрязнение окружающей среды...

Я словно хватался за соломинку, пытаясь унять растущую панику. Мне явно не хватало опыта, компетенции, чтобы охватить происшедшее во всей его потрясающей грандиозности. То же самое относилось и к Верджилу. Когда дело касается глобальных проблем, менее проницательного и способного на зрелые решения человека даже представить себе трудно.

— Но рискую только я один.

— Ты не можешь знать этого наверняка. Боже, Верджил, посмотри, что они с тобой делают!

— Со мной! Только со мной! — выкрикнул он.— Ни с кем другим!

Я покачал головой и поднял руки, признавая свое поражение.

— Ладно. Ну, откроет Бернард лабораторию, ты переселишься туда и превратишься в подопытную морскую свинку. А что дальше?

— Они не приносят мне вреда. Я сейчас больше, чем старый добрый Верджил Улэм. Я — целая галактика, черт побери! Сверхпрародитель!

— Ты, может быть, имеешь в виду, сверхинкубатор?

Он пожал плечами, не желая ввязываться в спор.

Всего этого мне оказалось более чем достаточно. Выдумав какие-то нелепые оправдания, я распрощался с ним и ушел. Потом долго сидел в холле внизу, успокаивая нервы... Кто-то должен убедить его. Но кого Верджил послушает? Он виделся с Бернардом...

И того, похоже, история Верджила не только убедила, но еще и очень заинтересовала. Люди типа Бернарда обычно не подталкивают верджилов улэмов этого мира к необдуманным действиям — за исключением тех случаев, когда чувствуют, что ситуацию можно обернуть себе на пользу.

Всего лишь догадка, но я решил попробовать. Подошел к уличному телефону, воткнул в щель кредитную карточку и позвонил в «Генетрон».

— Будьте добры, разыщите, пожалуйста, доктора Майкла Бернарда,— обратился я к секретарше.

— Простите, кто его спрашивает?

— Это его секретарь из «Телефонного сервиса». Поступил крайне важный звонок, а его бипер, видимо, не работает.

После нескольких минут ожидания Бернард взял трубку.

— Кто вы такой, черт побери? У меня нет никакого секретаря в «Телефонном сервисе».

— Меня зовут Эдвард Миллиган. Я друг Верджила Улэма. Нам, похоже, нужно встретиться и кое-что обсудить.

Договорились о встрече на следующее утро. По дороге домой я пытался придумать себе какое-нибудь оправдание, чтобы не выходить на работу еще один день, потому что я совершенно не мог думать о медицине и пациентах, которые заслуживали гораздо большего внимания.

Я испытал чувство вины, озабоченность, злость и страх.

В таком вот душевном состоянии меня и застала Гэйл. Я нацепил маску спокойствия, и мы вместе приготовили ужин. Потом, обнявшись, долго стояли у окна, выходящего к заливу, глядя, как зажигаются в сумерках городские огни. Несколько скворцов из оставшихся на зиму еще прыгали по увядшей лужайке в последних отблесках дневного света, потом унеслись с налетевшим порывом ветра, от которого задрожали стекла.

— Что-то случилось, Эдвард? — мягко спросила Гэйл.— Ты сам расскажешь или будешь и дальше делать вид, что все нормально?

— Просто настроение неважное,— ответил я.— Нервы. Работа в больнице.

— О боже, я поняла,— сказала она, садясь в кресло.— Ты решил развестись со мной и жениться на той женщине по фамилии Бейкер.

Миссис Бейкер, о которой я как-то рассказывал Гэйл, весила триста шестьдесят фунтов и догадалась, что она беременна, только на пятом месяце.

— Нет,— сказал я вяло.

— О, великое счастье! — провозгласила Гэйл, легко касаясь моего лба.— Но если вытягивать из тебя все клещами, можно с ума сойти.

— Видишь ли, я пока не могу об этом говорить, так что...— Я погладил ее по руке.

— Какие мы отвратительно серьезные,— сказала она, поднимаясь.— Я пойду приготовлю чай. Ты будешь?

Она обиделась, да я и сам мучился от того, что никому не мог ничего рассказать. Хотя почему бы и не открыться ей? Мой старый друг превращается в галактику...

Вместо этого я убрал со стола. В ту ночь мне долго не удавалось заснуть. Я сидел в постели, положив подушку за спину, и глядел на Гэйл. Пытался разобраться, что из всего того, что знаю, реальность, а что домыслы.

Я врач, говорил я себе. Профессия, связанная с наукой, техникой. И мне положено обладать иммунитетом к подобным футуристическим потрясениям.

Верджил Улэм превращается в галактику.

Как бы я себя чувствовал, если бы в меня пересадили триллион крошечных китайцев? Я улыбнулся в темноте и в тот же момент едва не вскрикнул: существа, обитавшие у Верджила внутри, были совсем чужими для нас, настолько чужими, что я или Верджил даже не могли рассчитывать на быстрое понимание. Может быть, мы вообще никогда их не поймем.

Однако это все домыслы, а я очень хорошо знал, что на самом деле относится к реальности. Спальня. Городские огни, просвечивающие из-за тюлевых занавесок. Спящая Гэйл. Это очень важно. Гэйл, спящая в постели.

Снова мне приснился тот самый сон. На этот раз город вошел через окно и набросился на Гэйл. Огромный, шипастый, ползучий, весь в огнях — он рычал что-то на непонятном мне языке, состоящем из автомобильных гудков, шума большой толпы и грохота строек. Я пытался бороться с ним, но он все-таки добрался до Гэйл... и превратился в поток мерцающих звезд, рассыпавшихся по постели, по всему, что нас окружало. Я резко проснулся и до самого рассвета больше не сомкнул глаз. Встал, оделся вместе с Гэйл и поцеловал ее перед уходом, ощутив сладостную реальность доверчивых человеческих губ.

Затем отправился на встречу с Бернардом. В его распоряжение был отдан кабинет в одной из больших пригородных больниц. Я поднялся лифтом на шестой этаж и воочию убедился, что могут сделать известность и состояние.

Прекрасно обставленная комната, изящные гравюры на шелке, украшающие стенные панели из дерева, мебель из хромированного металла и стекла, кремового цвета ковер, китайская бронза, полированные шкафы и столы.

Бернард предложил мне чашку кофе. Я не стал отказываться. Он сел сбоку от письменного стола, я — напротив него с чашкой кофе во влажных ладонях. На нем был серый с иголочки костюм. Седые волосы и четкий профиль дополняли картину. В свои шестьдесят с лишним он здорово напоминал Леонарда Бернстайна.

— По поводу нашего общего знакомого...— начал Бернард.— Мистера Улэма. Блестящий ученый и, я не побоюсь этого слова, отважный.

— Он мой друг. И я обеспокоен тем, что с ним происходит.

Бернард остановил меня, подняв палец:

— Но этот отважный человек совершил безрассудный, идиотский поступок. Того, что с ним произошло, просто нельзя было допускать. Решиться на такой шаг его вынудили обстоятельства, но это, конечно, не оправдание. Однако что сделано, то сделано. Насколько я понимаю, он вам все рассказал.

Я кивнул.

— Он хочет вернуться в «Генетрон».

— Разумеется. Там все его оборудование. И видимо, там же будет его дом, пока мы не разберемся с этой проблемой.

— Разберетесь... Как? И какой в этом прок? — Легкая головная боль мешала мне думать.

— О, я могу представить себе множество областей применения маленьких сверхплотных компьютеров на биологической основе. Право, это не так сложно. В «Генетроне» уже сделали несколько важных открытий, но тут совершенно новое перспективное направление.

— Что вы имеете в виду?

— Я не в праве обсуждать перспективы,— Бернард улыбнулся,— но это будет нечто совершенно революционное. И нам просто необходимо поместить мистера Улэма в лабораторные условия. Мы должны провести также эксперименты на животных. Разумеется, придется начинать все сначала. Дело в том, что э-э-э... колонии Верджила нельзя перенести в другой организм: они базируются на его лейкоцитах. Поэтому нам нужно будет создать новые колонии, которые не будут вызывать в других организмах иммунную реакцию.

— Подобно инфекции? — спросил я.

— Думаю, можно допустить и такое сравнение. Но Верджил не инфицирован.

— Мои тесты показали, что это не так.

— Видимо, аппаратура среагировала на те участки информационных потоков, что плавают в его кровеносной системе. Как вы думаете?

— Я не знаю.

— Послушайте, я бы хотел, чтобы вы заглянули в нашу лабораторию, когда Верджил туда переберется. Ваш опыт может оказаться для нас полезным.

Нас. Значит, он с «Генетроном» заодно. В состоянии ли он сохранить объективность?

— Каков ваш собственный интерес во всем этом деле?

— Эдвард, я всегда держался на переднем крае своей науки. И не вижу причин, почему бы не поработать здесь. С моими знаниями функций головного мозга и нервной системы, после всех исследований по нейрофизиологии, что я провел...

— Вы могли бы помочь «Генетрону» избежать правительственного расследования,— сказал я.

— Весьма грубо. Слишком грубо и, кроме того, несправедливо.

— Возможно. Но я согласен. Я бы очень хотел побывать в лаборатории, когда Верджил туда переедет. Разумеется, если при всей моей грубости приглашение еще остается в силе.

Бернард посмотрел на меня острым взглядом. Он понимал, я не буду играть на его стороне, и на какое-то мгновение эти мысли совершенно отчетливо проступили у него на лице.

— Конечно.

Он поднялся и протянул мне руку. Ладонь у него была влажная. Хотя Бернард старался этого не показать, нервничал он не меньше моего.

Я вернулся домой и просидел там до полудня. Читал и пытался разобраться в своих мыслях. Прийти к какому-то выводу. В частности, решить, что все-таки составляет реальность и что я должен защищать.

Перемены человек может принимать только в определенных дозах. Нововведения — это хорошо, но понемногу и постепенно. Нельзя навязывать их силой. Каждый имеет право оставаться прежним, пока не решит, что готов.

Величайшее научное открытие после...

И Бернард будет навязывать его силой. «Генетрон» тоже. Мысли об этом казались невыносимыми. «Неолуддит»,— обозвал я сам себя. Действительно, грязное обвинение.

Когда я нажал кнопку с номером квартиры Верджила на переговорной панели в холле высотного здания, он ответил почти сразу.

— Да,— сказал он возбужденно.— Поднимайся. Я в ванной. Дверь не заперта.

Я зашел в квартиру и двинулся по коридору к ванной. Верджил сидел в розоватой воде, погрузившись до самого подбородка. Он рассеянно улыбнулся и всплеснул руками.

(Окончание следует)

Перевод с английского А. Корженевского

Настоящая статья открывает серию публикаций о нахождении и анализе простых чисел с помощью самых массовых и недорогих программируемых микрокалькуляторов (ПМК) от Б3-34 до МК-61 или микрокомпьютеров МК-85 (с языком БЕЙСИК). В каждой статье вниманию читателей будет предложено по одной законченной программе. Они позволяют генерировать простые числа, находить простые делители натуральных чисел, исследовать целочисленные последовательности с «аномальным» содержанием простых чисел, строить занимательные и познавательные конструкции из простых чисел и алгоритмы для их получения.
Но учтите: чтение предлагаемых статей без одновременной проверки содержащихся в них программ (например, на МК-61) будет неэффективным. Можно даже сказать сильнее: будет бесполезным.

Алгоритмика простоты

50 томов в кармане

Б. ТАРАСЕНКО

Нелегкий вопрос-то,
Но верь одному:
Все сложно и просто,
Считай, по уму!

Однажды в 1948 году, когда автор этих строк учился в третьем классе, он вместо воскресного мороженого приобрел замечательную книжку Г. Н. Бермана «Число и наука о нем». Эта книжка навсегда сделала меня любителем целочисленной математики, особенно — простых чисел. Книжечка эта, наверное, будет интересна и нынешнему поколению искателей.

Простые числа издавна были объектом постоянного внимания любителей и профессионалов. Напомним, что простое — это натуральное число, отличное от единицы и делящееся нацело только на себя и на единицу. Первые простые числа таковы: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41,... Ряд простых чисел бесконечен.

В опубликованных таблицах простых чисел верхним пределом обычно является 6000, реже 10 000. Можно создать таблицу простых чисел и до 10^6, но она окажется многотомным изданием (примерно 50 томов). А нужно ли оно?

Оказывается его вполне могут заменить «простейшие» из мира компьютеров — программируемые микрокалькуляторы. Б3-34, МК-52, МК-54, МК-56, МК-61, снабженные соответствующей программой, способны дать точный ответ на многие вопросы. Для начала займемся генератором простых чисел. Приведенная ниже программа позволяет генерировать, начиная с заданного нечетного числа И, последовательные простые числа. При этом она проверяет, что исследуемое число И не делится ни на одно нечетное число в диапазоне от 3 до $\sqrt{И}$. Программа работоспособна от И=5 до И=99999989 включительно.

Несколько слов о форме описания программы. Мы полагаем, что имеем дело с той категорией читателей, которых легкое «сопротивление» материала только подзадоривает и обеспечивает большую работоспособность. Поэтому наши пояснения будут минимальными — как раз такими, чтобы владельцы Б3-34 (надписи на клавишах которого отличаются от надписей на МК-61) могли сами разобраться, что им надо нажимать.

Программа 1. Генератор последовательных простых чисел

Пригодны все ПМК от Б3-34 до МК-61. Переменные и используемые регистры: Д=Рг5 — теущий нечетный делитель; И=Рг6 — очередное нечетное испытуемое число; ЧАСТН= =Рг9=И/Д — частное от деления И на Д (сначала действительное число, а затем его целая часть).

Описание алгоритма

Задать начальное И. Для последовательных нечетных Д, начиная с Д=3, вычислять ЧАСТН=И/Д, затем К —

Текст программы с пошаговыми комментариями

00		Х→П	6	46	/+	Занесение в Рг6 стартового И из РгХ
01			1	01	/+	Константа 1
02		Х→П	5	45	/+	Занесение 1 в Рг5, подготовка счетчика Д
03	К	П→Х	5	Г5	/+	Д := Д + 1, начальная фаза работы счетчика Д
04	К	П→Х	5	Г5	/+	Д :=Д + 1; результат: новД = старД + 2
05		П→Х	6	66	/+	Вызов И = Рг6 в РгХ
06		П→Х	5	65	/+	Вызов Д в РгХ; И перемещается в РгY
07		÷		13	/+	ЧАСТН = И/Д
08		Х→П	9	49	/+	ЗАСЫЛКА ЧАСТН в Рг9
09	К	П→Х	9	Г9	/+	К = целая часть от ЧАСТН
10		П→Х	6	66	/+	Вызов И в РгХ
11		П→Х	9	69	/+	Вызов К в РгХ; И перемещается в РгY
12		П→Х	5	65	/+	Вызов делителя Д в РгХ; РгY = К; РгZ=И
13		х		12	/+	Д × К
14		—		11	/+	ОСТ = И — К × Д, остаток от деления
15	F	Х≠0		57	/+	ОСТ≠ 0?
16			24	24	/+	НЕТ (т. е. ОСТ = 0), переход на шаг 24
17		П→Х	9	69	/+	ДА (т. е. ОСТ ≠ 0), вызов целого ЧАСТН
18		П→Х	5	65	/+	Вызов Д
19		—		11	/+	РгХ = ЧАСТН — Д
20	F	Х<0		5С	/+	ЧАСТН — Д < 0?
21			03	03	/+	НЕТ, переход на шаг 03 к новому значению Д
22		П→Х	6	66	/+	ДА (множество Д исчерпано)
23		С/П		50	/+	Стоп-индикация И
24	К	П→Х	6	Г6	/+	И = И + 1, начало генерации нового И
25	К	П→Х	6	Г6	/+	И = И + 1, конец генерации; новИ = старИ + 2
26		БП		51	/+	Безусловный переход
27			01	01	/+	на шаг 01

целую часть И/Д и остаток ОСТ= =И−К×Д. В случае ОСТ=0 переходить на задание нового значения И. Если Д больше ЧАСТН (И — простое число), то осуществлять индикацию И с остановкой вычислений. Затем задать новИ=старИ+2 и перейти к исследованию этого И.

Оценка быстродействия программы: простота числа 5 подтверждается за 7 секунд, простота числа 99999989 — примерно за 7 часов.

Самая интересная команда в программе — 09. В результате ее выполнения число в Рг9 становится целым. Такой способ выделения целой части числа применим и на моделях ПМК, предшествующих МК-61, на которых номинально нет операции выделения целой части числа.

Инструкция

После набора программы и переключения ПМК в режим счета нажать клавишу В/О. Затем набрать начальное нечетное целое И и нажать клавишу С/П, начнется счет; после останова счета на индикаторе — очередное простое число. Нажатие С/П запускает новый цикл работы, завершающийся появлением на индикаторе нового простого числа, и так далее.

С помощью этой программы можно легко убедиться, что цепочка чисел 3, 31, 331, 3331, 33331, 333331, 3333331, 33333331 составлена из одних простых чисел. Прелесть маленьких личных открытий и побед заметно потускнеет, если мы дадим слишком много подсказок и приведем готовые результаты. Поэтому до следующего выпуска нашей серии оставляем любителя математики, исследователя наедине с ручным персональным компьютером-калькулятором и этой программой.

Игры и головоломки

Коммутативная головоломка Эрне Рубика

В прошлом году мы познакомили читателей «Кванта» с «часами Рубика» (см. 4-ю с. обложки 4-го номера). Хотя эта головоломка была запатентована знаменитым изобретателем в 1988 году, она все еще малоизвестна у нас (да, пожалуй, такой и останется). Тем не менее, мы получили письма с просьбами выполнить данное почти года назад обещание и рассказать о «часах» подробнее. Надеемся, что наш рассказ будет интересен всем любителям головоломок, а не только немногочисленным обладателям «часов Рубика», тем более, что эта головоломка и устроена, и решается проще, чем, скажем, «волшебный кубик», и поэтому, уяснив себе, как «часы» работают, вы можете попробовать придумать алгоритм «на кончике пера».

Рисунок 1 показывает, как выглядят «часы Рубика» снаружи: с двух сторон круглого корпуса расположены по 9 окошек с вращающимися кружками-циферблатами, на которых нарисованы стрелки. Сбоку корпуса выступают 4 шестеренки, вращая которые, стрелки можно переводить. Скрытый зубчатый механизм — «коробка передач» — позволяет подключать к вращению разные наборы циферблатов. Управляется «коробка передач» кнопками; на каждой стороне корпуса их по 4, но фактически это 4 стержня, выступающие с обеих сторон: если нажать на стержень с лицевой стороны, он выскочит с тыльной, и наоборот. Задача ставится так же, как для «кубика» и множества других подобных головоломок — «запутав» показания часов, надо вернуть их все в «правильное» состояние, а именно, поставить на 12 часов.

Рис. 1.

Прежде чем решать эту задачу, надо, конечно, разобраться, как «часы» управляются, какие стрелки подключаются к вращаемой шестеренке при том или ином варианте нажатия кнопок («передаче»). Тот, у кого головоломка есть, должен просто перепробовать все варианты. А остальным мы предлагаем сразу заглянуть внутрь «часов». На рисунке 2 вы видите, что на ведущих (угловых) шестеренках, выступающих из корпуса, укреплены по 2 циферблата — с тыльной и лицевой стороны; такие парные циферблаты всегда вращаются синхронно. Эта шестеренка сцеплена с шестеренкой на ближайшей кнопке, а она, в свою очередь, сцеплена либо с шестеренками трех соседних тыльных циферблатов (центрального и двух боковых), если кнопка нажата, либо с тремя соответствующими циферблатами лицевой стороны, если кнопка отжата. С этих шестеренок в зависимости от «передачи» вращение может распространяться еще дальше. Очевидно, сцепленные между собой циферблаты могут вращаться только одновременно, в одну сторону и с одной и той же скоростью. Можно сказать, что «часы Рубика» имеют 14 «степеней свободы», отвечающих 4 парам угловых циферблатов и еще 10 одиночным циферблатам, каждый

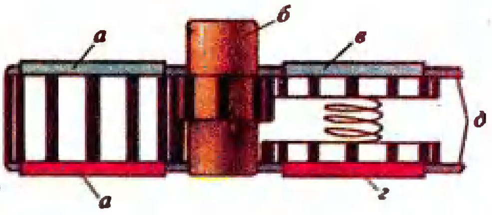


Рис. 2. «Часы Рубрика» в разрезе (плоскостью, проходящей через оси углового и центрального циферблатов): а) пара угловых циферблатов, укрепленных на ведущей шестеренке, б) кнопка с шестеренкой для переключения передач, в) лицевой центральный циферблат, г) тыльный центральный циферблат, д) корпус головоломки.

из которых в принципе может быть повернут независимо от остальных. Следовательно, число различных расположений стрелок не превосходит $12^{14} \approx 1{,}28 \cdot 10^{15}$. В дальнейшем мы увидим, что все эти расположения действительно можно получить.

А теперь посмотрим, какими возможностями при переводе стрелок мы располагаем. Каждая из кнопок может находиться в двух положениях, поэтому всего в головоломке имеется $2^4 = 16$ «передач». При любом нажатии кнопок можно выделить две группы подключенных друг к другу циферблатов: в одну входят угловые пары и лицевые циферблаты, окружающие ненажатые кнопки, другая определяется так же, только если посмотреть на «часы» с тыльной стороны. Каждая пара угловых циферблатов обязательно попадет в одну из групп, но некоторые «одиночные» циферблаты могут оказаться несцепленными с другими. Таким образом, при заданном положении кнопок имеется, вообще говоря, два способа вращения стрелок — можно вращать любую из двух групп. Но в двух случаях — когда все кнопки нажаты или отжаты — образуется только одна группа, поэтому общее число способов вращения равно $2 \cdot 16 - 2 = 30$. Однако если считать *эквивалентными* те способы вращения, которые получаются друг из друга поворотом головоломки в ее плоскости или ее переворачиванием, то останутся всего 5 неэквивалентных вариантов. Все они показаны на рисунке 3. (Проверьте, что имеется 2 способа вращения, эквивалентные варианту A, по 8 способов, эквивалентные B, C и E, и 4 способа, эквивалентные D.) Если повернуть ведущее колесико на $360°/12 = 30°$, то в зависимости от включенной «передачи» те или иные циферблаты (на рисунке 3 они помечены стрелками) повернуться на тот же угол, т. е. на 1 час. Такие операции будем называть *элементарными;* для «передач», показанных на рисунке 3, мы будем обозначать их, соответственно, A, B, C, D, E. Результат операции можно записывать с помощью таблички из нулей и единиц:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

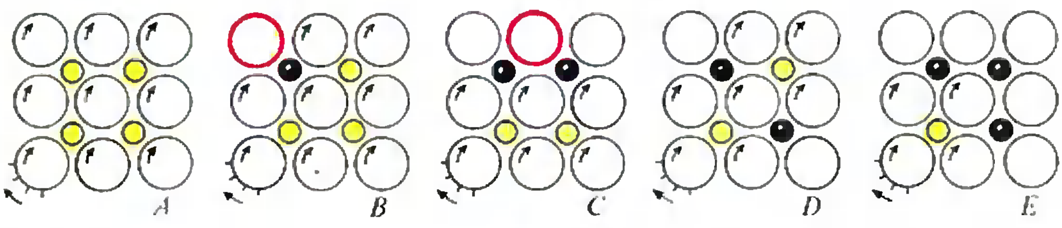


Рис. 3. Пять принципиально различных передач «часов Рубика» (вид с лицевой стороны): желтым показаны ненажатые кнопки, черным — нажатые, зубцы выделены у вращаемой шестеренки.

и т. д.; здесь 1 означает поворот на 1 час, 0 — отсутствие поворота. (Таблички для A, B, C показывают лишь то, что происходит на лицевой стороне «часов», но этого достаточно, т. к. на тыльной стороне будут вращаться только угловые циферблаты, повторяя вращение парных им лицевых.) Чтобы найти результат последовательного выполнения нескольких элементарных операций, надо просто сложить поэлементно соответствующие таблицы. Например,

$$A+A=2A=\begin{pmatrix}2&2&2\\2&2&2\\2&2&2\end{pmatrix},\ A+C=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&2\\2&2&2\end{pmatrix}.$$

Очевидно, что такое «сложение» операций коммутативно, т. е. не зависит от порядка слагаемых. И в этом — главная особенность «часов Рубика», которая делает их существенно проще «волшебного кубика» и родственных ему головоломок.

Результат любой «неэлементарной» операции полностью определяется числом повторений в ней каждой из 30 возможных элементарных операций (оно может быть и нулем), поэтому ее можно записать в виде суммы 30 слагаемых $aA+bB+cC+dD+eE$, где коэффициенты a, b, c,...— это количество повторений A, B, C ..., или углы (в часах), на которые поворачивается ведущая шестеренка при соответствующих положениях кнопок. Теперь дело сводится к чисто алгебраической задаче, точнее, просто к решению системы линейных уравнений.

Действительно, определим для каждого циферблата угол, на который его надо повернуть, чтобы поставить стрелку на 12 часов; получатся две таблички для лицевой и тыльной стороны.

Пусть, например, для лицевой стороны эта табличка выглядит так:

$$\begin{pmatrix}t_{11}&t_{12}&t_{13}\\t_{21}&t_{22}&t_{23}\\t_{31}&t_{32}&t_{33}\end{pmatrix},$$

тогда соответствующие уравнения имеют вид

$$\begin{gathered}1\cdot a+0\cdot b+0\cdot c+0\cdot d+\\ +0\cdot e+\ldots=t_{11},\\ 1\cdot a+1\cdot b+0\cdot c+1\cdot d+\\ +0\cdot e+\ldots=t_{12},\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ 1\cdot a+1\cdot b+1\cdot c+0\cdot d+\\ +0\cdot e+\ldots=t_{33}.\end{gathered}$$

Всего здесь 9 уравнений с 30 неизвестными, но, добавляя еще 5 уравнений для неугловых циферблатов тыльной стороны, получим систему из 14 уравнений. Ее надо решить в целых числах, а точнее, «по модулю 12», т. е., считая числа, дающие одинаковый остаток при делении на 12, равными (ведь 12 час=0 час). Поскольку число неизвестных здесь больше числа уравнений, часть из них, вообще говоря, можно задать произвольно, а остальные уже найти из системы. Ясно, что оставить нужно 14 неизвестных — по числу уравнений, т. е. из всего многообразия 30 элементарных операций можно ограничиться только 14-ю. Но эти операции (или неизвестные в наших уравнениях) должны быть независимы, т. е. ни одна из них не должна выражаться через остальные — иначе мы не сможем получить все 12^{14} состояний «часов Рубика»...

Прервем здесь наши алгебраические рассуждения. Принцип уже ясен, а такое чисто вычислительное, рутинное решение не требует ни воображения, ни соображения — качеств, без которых любая головоломка теряет всю привлекательность. Обратимся лучше снова к рисунку 3 и попробуем, глядя на него, найти такие комбинации элементарных операций, которые позволяли бы переводить стрелки наших часов по отдельности, или хотя бы небольшими группами. Это позволило бы найти прямой путь к решению.

Одна такая операция видна сразу — это

$$A-B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

(знак «минус», конечно, означает, что стрелки поворачиваются в направлении, противоположном указанному на рис. 3). Операция $t(A-B)$, где $t=0, 1, ..., 11$, поворачивает на t делений левую верхнюю пару угловых циферблатов. Аналогично можно поворачивать по отдельности и 3 другие угловые пары. Эти операции удобно использовать в конце решения, поскольку они не разрушат того, что уже достигнуто.

Теперь хотелось бы найти аналогичную операцию для боковых циферблатов. Причем она может поворачивать и угловые циферблаты, ведь мы их все равно будем устанавливать позже. Наверное, вы уже нашли ответ:

$$A-C=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

Эта операция переводит на 1 час вперед верхнюю стрелку на лицевой строке (и соседние с ней угловые). Понятно, что головоломку можно повернуть так, чтобы на «верхнем лицевом» месте оказался и любой из 7 других боковых циферблатов.

Итак, мы имеем 8 эквивалентных операций для установки боковых циферблатов и 4 — для угловых. Добавим к ним еще две операции для центральных циферблатов, например, A и аналогичную «тыльную» операцию. Получится 14 операций, которых достаточно для решения головоломки (вспомним систему из 14 уравнений!). Действовать можно так:

1) операцией A (точнее, tA, где $t=0, 1, ..., 11$) устанавливаем центральную стрелку лицевой стороны на 12 часов;

2) операциями вида $t(A-C)$ устанавливаем лицевые боковые стрелки (центральная останется при этом неподвижной);

3) переворачиваем головоломку и повторяем первые два шага;

4) операциями вида $t(A-B)$ устанавливаем угловые стрелки.

Можно было бы на этом и закончить, но наш алгоритм допускает усовершенствование, точнее, его можно сократить. Если считать «ходом» поворот одной из шестеренок при фиксированной «передаче», то число ходов для 1-го шага равно 1, для 2-го — $2\cdot 4=8$ (на каждый циферблат тратится 2 хода — tA и $-tC$), для 3-го — еще $1+8=9$, для 4-го — $2\cdot 4=8$, а всего — 26. Но ведь мы использовали только 14 разных элементарных операций (A, B, C и получающиеся из них поворотами головоломки), а значит, меняя их порядок, можно свести все к 14 ходам. Вот как это делается:

1) операцией вида tC установим центральную лицевую стрелку параллельно верхней лицевой; поворачивая корпус на 90°, повторим эту процедуру еще 3 раза — в результате 5 стрелок (центральная и боковые) на лицевой стороне станут параллельными;

2) операцией вида tA установим эти 5 стрелок на 12 часов;

3) переворачиваем головоломку и повторяем 1-й шаг;

4) операцией вида tC (на тыльной стороне!) устанавливаем все 5 неугловых стрелок параллельно левой верхней угловой и повторяем это еще 3 раза, поворачивая головоломку на 90° — в результате все 9 стрелок станут параллельными;

5) операцией tA (опять-таки на перевернутой головоломке, т. е. на тыльной стороне) ставим все стрелки на 12 часов. Все.

Сделаем в заключение еще несколько замечаний. Ясно, что наш алгоритм позволяет получить любое из 12^{14} возможных расположений стрелок. При этом мы используем 14 ходов, каждый из которых является повторением (в количестве от 0 до 11) одной из 14 элементарных операций A, B, C и им эквивалентных. С учетом коммутативности имеется всего 12^{14} различных комбинаций этих операций. А это значит, что все они различны и каждому расположению стрелок отвечает только одна такая комбинация.

Итак, если *ограничиться только выделенными нами 14-ю операциями*, можно утверждать, что

от любого расположения стрелок к любому другому можно перейти не

(Окончание см. на с. 75)

Варианты вступительных экзаменов

Задачи вступительных экзаменов в различные вузы в 1990 году

Предлагаем подборку задач письменных и устных вступительных экзаменов по математике и физике в некоторые университеты — Белорусский (1), Донецкий (2), Нижегородский (3), Омский (4), Петрозаводский (5), Уральский (6), Ярославский (7), Рижский технический (8) и институты — Московский институт связи (9), Нижегородский политехнический (10), Томский политехнический (11), Ярославский педагогический (12).

Математика

Алгебра

1 (3). Найдите двузначное число, если оно втрое больше суммы своих цифр, а квадрат этой суммы втрое больше искомого числа.

2 (3). Если двузначное число разделить на произведение его цифр, то в частном будет 4, а в остатке 1. Если это число разделить на сумму его цифр, то в частном получится 3, а в остатке 1. Найдите это число.

3 (9). Планку длиной 364 см распилили на две части так, что первая из них оказалась короче второй на 18 %. Найдите длину каждой части.

4 (7). Имеются два сплава, в одном из которых содержится 40 %, а в другом — 20 % серебра. Сколько килограммов второго сплава нужно добавить к 20 кг первого, чтобы получить сплав, содержащий 32 % серебра?

5 (9). Сплав меди и цинка массой в 12,5 кг содержит 40 % меди. Какую массу меди нужно добавить к этому куску, чтобы полученный новый сплав содержал меди и цинка поровну?

6 (7). Два насоса, работая вместе, выкачали из бассейна воду за 12 часов. Если бы сначала один из них выкачал половину воды, а затем другой — оставшуюся половину, то на всю работу им понадобилось бы 25 часов. За сколько часов выкачает всю воду из бассейна каждый из насосов отдельно?

7 (7). Две бригады, работая вместе, могут выполнить работу за 8 часов. Первая бригада, работая одна, может выполнить эту работу на 12 часов быстрее, чем вторая бригада. Сколько часов потребовалось бы первой бригаде для выполнения этой работы?

8 (4). На обработку одной детали первый рабочий затрачивает времени на 7 минут меньше, чем второй. Сколько деталей каждый из них обработает за 4 часа, если первый обрабатывает за это время на 28 деталей больше второго?

9 (6). Из пункта A в пункт B выехал грузовой автомобиль. Через 1 ч из пункта A в пункт B выехал легковой автомобиль, который прибыл в пункт B одновременно с грузовым автомобилем. Если бы грузовой и легковой автомобили одновременно выехали из пунктов A и B навстречу друг другу, то они бы встретились через 1 ч 12 мин после выезда. Сколько времени провел в пути от A до B грузовой автомобиль?

10 (2). Из пункта A в пункт B, расстояние между которыми равно 120 км, на мопеде отправился курьер. Через 30 мин после этого из A вдогонку за первым отправился второй курьер, который, догнав первого и отдав дополнительные поручения начальства, тотчас повернул обратно и двинулся к A с прежней скоростью. Второй курьер прибыл в A на 30 мин раньше, чем первый прибыл в B. Какова скорость второго курьера, если скорость первого равна 30 км/ч?

11 (2). Из пункта A в пункт B, расстояние между которыми равно 50 км, по спокойному морю отправился на моторной лодке рыбак. Через 1,5 ч из A на скутере вдогонку за первым выехал второй рыбак, который, догнав первого, двинулся обратно к A с прежней скоростью. Когда второй прибыл в A, первый рыбак проделал три четверти пути до B, оставшегося после встречи со вторым. Какова скорость второго рыбака, если скорость первого равна 10 км/ч?

12 (9). В магазине продаются конфеты трех видов. Стоимость покупки 0,8 кг первого, 0,2 кг второго и 0,3 кг третьего вида составляет 10 р. Стоимость покупки 0,5 кг первого, 0,3 кг второго и 0,2 кг третьего вида — 8 р. Сколько потребуется заплатить за покупку 1,1 кг первого, 0,1 кг второго и 0,4 кг третьего вида?

13 (9). Найдите шестой член арифметической прогрессии, если сумма любых первых n членов ее равна $4n^2$.

14 (7). Найдите третий член геометрической прогрессии, если известно, что сумма первого и второго членов составляет 200 % третьего члена, а четвер-

тая степень третьего члена составляет 50 % квадрата четвертого члена.

15 (5). Найдите сумму четырех чисел, образующих геометрическую прогрессию, у которой третий член больше первого на 9, а второй больше четвертого на 18.

16 (3). Найдите сумму всех трехзначных натуральных чисел, которые делятся на 4, а при делении на 3 дают в остатке 2.

17 (9). Определите стороны треугольника, если они выражаются целыми числами, образующими геометрическую прогрессию, причем произведение этих чисел равно 216.

18 (7). Найдите сумму семнадцати первых членов арифметической прогрессии a_1, a_2, a_3, ..., если $a_4+a_8+a_{11}+a_{13}=16$.

19 (7). Найдите все пятизначные числа вида $74s3t$ (s и t — цифры), которые делятся на 45.

20. Вычислите:

а) (5). $\lg 1000^{2,8}+\lg 0{,}001^{2,8}$;

б) (8). $\frac{1}{2}\log_5 3+\log_5\sqrt{15}-\frac{1}{3}\log_5\frac{27}{25}$;

в) (9). $\left(\frac{\lg 125-2\lg 2}{\lg\sqrt[3]{4}+\lg 0{,}2}\right)^2$;

г) (5). $\sin^2 32^\circ+\cos 32^\circ\sin 58^\circ-2{,}5$;

д) (9). $\sqrt{5\cos(\operatorname{arctg} 0{,}75)}$;

е) (9). $\cos 72^\circ-\sin 54^\circ$.

21. Докажите равенство:

а) (9). $\sin\frac{3\pi}{10}\sin\frac{\pi}{10}=\frac{1}{4}$;

б) (9) $\operatorname{tg}(\arcsin x)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$;

в) (9). $\left(\frac{2}{\sqrt{3}-1}+\frac{3}{\sqrt{3}-2}+\frac{15}{3-\sqrt{3}}\right)\times$

$\times(\sqrt{3}+5)^{-1}=\frac{1}{2}$;

г) (9). $\frac{1-4\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}+2\sin\alpha\cos\alpha=1$;

д) (9). $\frac{\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}+\operatorname{tg}\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}-\operatorname{tg}\alpha}=$

$=\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$;

е) (9). $\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\alpha}}=\sin\frac{\alpha}{4}$

при $\pi<\alpha<2\pi$.

22. Упростите выражение:

а) (5). $\frac{x^2-\sqrt{x}}{(x\sqrt{x}+x+\sqrt{x})(\sqrt{x}-1)}+2$;

б) (11). $\frac{1-x^2}{2((1-\sqrt{x})^2+2\sqrt{x})(1-x)}$;

в) (11). $\Bigg(\frac{1}{(a^{0,5}+b^{0,5})^{-2}}-$

$-\left(\frac{a^{0,5}-b^{0,5}}{a^{1,5}-b^{1,5}}\right)^{-1}\Bigg)^2(ab)^{-0,5}$;

г) (8). $\frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}:\sqrt{(a+b)^2-4ab}-$

$-\left(1+\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^{-1}$

при $b>a>0$;

д) (9). $\left(\frac{3-x}{\sqrt{3}-\sqrt{x}}-\frac{3^{3/2}-x^{3/2}}{3-x}\right)^2\times$

$\times 10^{-\log_{0,1}(3+2\sqrt{3x}+x)}$;

е) (9). $\left(\frac{\sqrt[4]{a^{-3}}-1}{\sqrt[4]{a^{-1}}-1}+\sqrt[4]{a^{-1}}\right)^{1/2}\times$

$\times\left(a^{-1/2}-\frac{\sqrt[4]{a^{-3}}+1}{\sqrt[4]{a^{-1}}+1}\right)(a^{-0,5}-a)^{-1}$;

ж) (9). $\frac{\sqrt{2}(x-a)}{2x-a}-\Bigg(\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2x}+\sqrt{a}}\right)^2+$

$+\left(\frac{\sqrt{2x}+\sqrt{a}}{2\sqrt{a}}\right)^{-1}\Bigg)^{1/2}$

и вычислите его значение при $a=0{,}32$, $x=0{,}08$;

з) (11). $\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{a-b}}{\sqrt{a}-\sqrt{a-b}}-\frac{\sqrt{a}-\sqrt{a-b}}{\sqrt{a}+\sqrt{a-b}}\right):$

$:\sqrt{\frac{a-b}{a}}$,

вычислите его значение при $a=8$, $b=1$;

и) (9). $\frac{4a^{0,25}+bc^{1,5}}{(4+c^{1,5})(a^{0,25}-b)}+$

$+\frac{a^{1/4}c^{3/2}-4b}{(4-c^{1,5})(\sqrt[4]{a}-b)}$;

к) (9). $\left(\frac{a}{\sqrt{a}+\sqrt{2}}-2(\sqrt{a}+\sqrt{2})^{-1}\right)\times$

$\times\left(\frac{a\sqrt{a}-2\sqrt{2}}{\sqrt{a}+\sqrt{2}+\frac{2}{\sqrt{a}}}\right)^{-1}\cdot 7^{\log_{49}a}$;

л) (8). $\frac{8(\cos^3\alpha+\sin^3\alpha)}{3(\cos\alpha+\sin\alpha)}$

и вычислите его значение при $\alpha=75°$;

м) (8). $\frac{\cos 4\alpha+4\cos 2\alpha+3}{1+\cos^2 2\alpha-2\cos^4\alpha}$.

23. Решите уравнение:

а) (10). $\sqrt{x^2-5x+6}=x+2$;

б) (11). $\sqrt{3x+1}+1=x$;

в) (8). $\sqrt{5x}-\frac{4}{\sqrt{3x+1}}=\sqrt{3x+1}$;

г) (11). $\sqrt{2x-4}-\sqrt{x+5}=1$;

д) (7). $|3\sqrt{x}-1|=3$;

е) (7). $\sqrt{|1+x|}=1-2|x|$;

ж) (11). $\sqrt[3]{-12+6\sqrt{4+(2x+1)^3}}+$
$+2x=-1$;

з) (8). $\frac{1}{8}\cdot 6^{3x}=2^{2x}\cdot 3^{3x}$;

и) (10). $5^{2x-1}+2^{2x}-5^{2x}+2^{2x+2}=0$;

к) (7). $5^{x+1}+5^{1-x}=10$;

л) (7). $4^{x+2}+3\cdot 4^{x-2}=259/4$;

м) (8). $7\cdot 3^{x+1}-5^{x+2}=3^{x+4}-5^{x+3}$;

н) (8). $4^x+3^{x+1}\cdot 2^x=4\cdot 9^x$;

о) (7). $2^{x+1}-4\cdot 3^x=0{,}5^{-x}-3^{x+1}$;

п) (5). $4^{\log_2 x}+x^2=8$;

р) (11). $9^{\log_3(1-2x)}=5x^2-4$;

с) (2). $\log_5(5^x-24)=2-x$;

т) (4) $\log_2(9^{x-1}+7)=2+\log_2(3^{x-1}+1)$;

у) (9). $\log_4 x+\log_x\frac{1}{16}=1$;

ф) (8). $\log_2 x+\log_2(x+5)=1+2\log_2 5$;

х) (9). $\log_5\sqrt{3x+4}\cdot\log_x 5=1$;

ц) (9). $\sqrt{\log_x\sqrt{2x}}\cdot\log_2 x=-1$;

ч) (3). $\log_{3x+7}(9+12x+4x^2)+$
$+\log_{2x+3}(6x^2+23x+21)=4$;

ш) (8). $\log_7(6+7^{-x})=1+x$;

24. Решите тригонометрическое уравнение:

а) (7). $\sin x+\cos 2x+2=0$;

б) (9). $\cos^2 x-\sin^2 x-\sin x=0$;

в) (11). $2\cos x(\cos x-\sqrt{8}\,\mathrm{tg}\,x)=5$;

г) (8). $9\cos^4 x-\sin^4 x=2\sin^2 2x$;

д) (11). $3\,\mathrm{ctg}\,x-3\,\mathrm{tg}\,x+4\sin 2x=0$;

е) (8). $\frac{\sin x}{1-\cos x}=1+\cos x$;

ж) (12). $\sin 2x-\frac{\sin 4x}{4\cos^2 x}=1$;

з) (2). $\mathrm{ctg}\,\frac{3x}{2}-\mathrm{ctg}\,\frac{x}{2}=2\sin x$;

и) (2). $\mathrm{ctg}\,\frac{x}{4}+\mathrm{ctg}\,\frac{3x}{4}=2\sin x$;

к) (8). $\sin^2 x+\sin^2 2x=\sin^2 3x$;

л) (6). $2\cos 8x+4\sin 3x\sin 5x-1=0$;

м) (6). $\sin^4 3x-\sin^4\left(\frac{\pi}{4}+3x\right)=0$;

н) (9). $(1-\cos 2x)\sin^2 x+2\cos^4 x=$
$=0{,}5(5-\cos 4x)$;

о) (3). $(1-\mathrm{tg}\,x)(1+\sin 2x)=1+\mathrm{tg}\,x$;

п) (6). $4\sin^3 x\cos 3x+4\cos^3 x\sin 3x=$
$=3\sin 2x$;

р) (4). $\sin^3\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\sin x$;

с) (3). $1+\frac{\cos 2x}{\sin x}=\frac{1+\cos 2x\sin x}{\sin x}$;

т) (3). $1+\mathrm{tg}\,2x=\frac{1-\sin 2x}{\cos^2 2x}$;

у) (3). $(1-\sin 2x)(1-\mathrm{tg}\,x)=\frac{1}{\cos x}-$
$-2\sin x$;

ф) (9). $2(\sin x+\cos x)+\sin 2x+1=0$;

х) (9). $2\sin^2 3x+\sqrt{3}\sin 6x-1=$
$=2\cos 3x$;

ц) (2). $\sqrt{1+2\sin x}+\cos x=0$;

ч) (7). $\lg\sqrt{\mathrm{ctg}^2 x}=\lg(1/2)-\lg\sin x$;

ш) (9). $\sqrt[3]{1+\lg \operatorname{tg} x}+\sqrt[3]{1-\lg \operatorname{tg} x}=2$;

щ) (7). $\sin(7\pi\sqrt{x})+\cos^2(2\pi\sqrt{x})=$
$=\sin^2(2\pi\sqrt{x})+\sin(\pi\sqrt{x})$;

ь) (9). $\sin^2 x+\cos^2 y+2\sin x+1=0$.

25. Найдите все корни уравнения:

а) (9). $\sin^2 x-\sqrt{3}\sin 2x-\cos^2 x=-2$, если $0<x<4$;

б) (9). $1+\sin x+\sin 2x=\sin 5\pi/2$, если $x\in[0;\ \pi]$;

в) (2). $2\cos 2x-8\cos x+5=0$, если $\sin x\geqslant 0$.

26. Решите неравенство:

а) (10). $x\leqslant 7-\dfrac{16}{x+1}$;

б) (12). $(x+1)\sqrt{4-x^2}\leqslant 0$;

в) (2). $\sqrt{x^2-3x-4}>x-2$;

г) (2). $\sqrt{x^2-5x+4}>x-3$;

д) (4). $\sqrt{\left|\dfrac{1}{4}-x\right|}\geqslant x+\dfrac{1}{2}$;

е) (4). $\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+1}<1$;

ж) (3). $\dfrac{2^{1-x}}{2^x-1}\leqslant 1$;

з) (9). $2^{2x}-15\cdot 11^x<11^x-15\cdot 2^{2x+3}$;

и) (9). $6^{\frac{2x-1}{3-x}}<1$;

к) (9). $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{6x+10-x^2}<\dfrac{27}{64}$;

л) (8). $\log_3\dfrac{x+2}{3x-1}\leqslant 1$;

м) (8). $\log_{1/2}\log_9(2x+5)>1$;

н) (6). $\log_x\log_2(12-4^x)\geqslant 1$;

о) (6). $\log_{x-1}\log_2(4^x-5)\leqslant 1$;

п) (3). $\log_{1/3}\left(\dfrac{1}{x}\right)\log_x 3>2$;

р) (11). $\log_{1/2}x+\log_{1/2}(x+1)\leqslant$
$\leqslant\log_{1/2}(2x+6)$;

с) (9). $(2x^2-5x+3)^{\log_{0,5}\frac{2x-3}{x+1}}>1$;

т) (6). $\log_{|x-2|}\dfrac{3x-2}{2x-8}<0$;

у) (8). $\dfrac{x^2-x-2}{2-\log_2(x^2-5x+4)}>0$;

ф) (7). $\sqrt{|6\log_2(1/x)-1|}\leqslant 1-3\log_2 x$.

27. Найдите область определения функции:

а) (3). $\lg(7\sqrt{8\log_x 3-2}-$
$-8\log_x 3+10)$;

б) (7). $\sqrt{\log_{1/2}\dfrac{3x^2+x+1}{2x^2+5x+6}}$;

в) (7). $\log_2(1+|1-x^2|-|x^2-4|)$.

28 (7). Решите систему неравенств:

$$\begin{cases}\dfrac{8-4x}{x+1}>4+\dfrac{x+1}{x-2},\\ |x+4|>|x-3|;\end{cases}$$

29 (7). Решите систему неравенств

$$\begin{cases}\dfrac{1}{3\sin 3x-11}+\dfrac{1}{8-3\cos 3x}\leqslant 0,\\ \dfrac{1}{3\sin(3x+7\pi/2)-11}+\\ +\dfrac{1}{8-3\cos(3x+7\pi/2)}\leqslant 0;\end{cases}$$

найдите все ее решения, являющиеся членами арифметической прогрессии $\pi/5$, $-3\pi/5$, $-7\pi/5$, ...

30 (8). Найдите наименьшее целое значение параметра a, при котором уравнение $x^2-2ax+4=0$ не имеет действительных корней.

31 (8). При каких значениях a уравнение

$$a(x^2+x+1)=x^2-4x-7$$

имеет один корень?

32 (11). При каких значениях a один из корней уравнения

$$x^2+(2a-1)x+a^2+2=0$$

равен удвоенному другому?

33 (2). При каком значении параметра a сумма квадратов корней уравнения $x^2+(2-a)x-a^2+1=0$ принимает наименьшее значение?

34 (8). В уравнении $2x^2+ax-6=0$ один из корней равен 3. Найдите a и второй корень.

35 (9). При каких значениях a оба корня уравнения

$$(a-1)x^2-2ax+a+3$$

положительны?

36 (2). При каких значениях m оба корня уравнения

$$x^2+2(m-1)x+4m-7=0$$

отрицательны?

37 (8). Найдите такие значения m, при которых неравенство

$$\frac{x^2-8x+20}{mx^2+2(m+1)x+9m+4}<0$$

справедливо при любых действительных значениях x.

38 (6). При каких значениях a неравенство

$$ax^2+4x>1-3a$$

справедливо при всех $x>0$?

39 (6). При каких значениях параметра a неравенство

$$(a-1)x^2-4x<a+4$$

справедливо при всех $x<0$?

40 (3). При каких a система

$$\begin{cases} 2x+2(a-1)y=a-2, \\ 2|x+1|+ay=2. \end{cases}$$

имеет единственное решение? Найдите это решение.

41 (7). Найдите все значения a, при которых уравнение

$$|3-x-a|+1=|x-3|$$

не имеет решений.

42 (9). Решите систему уравнений:

а) (9) $\begin{cases} 2|x-1|-5y=1, \\ 7x+5y=-9; \end{cases}$

б) (9). $\begin{cases} x^2+y=3, \\ x-2y=-5; \end{cases}$

в) (2). $\begin{cases} 4^x-25^y=319, \\ 2^x-5^y=7; \end{cases}$

г) (9). $\begin{cases} \log_3(2x+y^2)=0, \\ 2^{x+y^2}-4=0; \end{cases}$

д) (4). $\begin{cases} \log_2(x-y)=5-\log_2(x+y), \\ \dfrac{\lg x-\lg 4}{\lg 3-\lg y}=1; \end{cases}$

е) (2). $\begin{cases} \log_5^2 x-\log_4^2 y^2=0, \\ \log_5 x+\log_4 y^2=4; \end{cases}$

ж) (9). $\begin{cases} \log_3\log_2 x-\log_3\log_{1/2} y=1, \\ xy^2=4; \end{cases}$

з) (9). $\begin{cases} y-\log_3 x=1, \\ x^y=3^{12}. \end{cases}$

43 (12). Может ли квадратное уравнение с целыми коэффициентами иметь корни $-3+\sqrt{7}$ и $\dfrac{2}{\sqrt{7}-3}$? Если да, то составьте это уравнение.

44 (9). Докажите, что при любых действительных значениях x и y имеет место неравенство

$$x^2+y^2+10x+4y+30>0.$$

45. Решите уравнение:

а) (9). $x^2+2y^2+2xy-2x+4y+10=0;$

б) (9). $3x^2+3y^2-4xy-2x-2y+2=0.$

Анализ

1 (10). При каком значении a графики функций $y=4^x$ и $y=\log_a(-x)$ пересекаются в точке с абсциссой $-1/2$? Постройте графики функций.

2 (10). Найдите наименьшее положительное значение m, при котором функции $y=\operatorname{ctg} x$ и $y=2\sin mx$ пересекаются в точке с абсциссой $\pi/6$. Постройте графики функций и отметьте точку их пересечения.

3 (8). Вычислите $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$, если

$$f(x)=\frac{1}{2}\sin x \operatorname{tg} 2x+2{,}5\cos x.$$

4 (11). Решите неравенство $f'(x)\leqslant\varphi'(x)$, где $f(x)=e^x(x^2-3x+1)$, $\varphi(x)=e^x\cdot 2x$. В ответе укажите наибольшее значение x из полученного множества решений.

5 (8). При каком значении x касательная к линии $y=x^2-2x+5$ параллельна прямой $y=2x$?

6 (7). Запишите уравнение касательной к графику функции $y=3e^x+3e$ в точке $x=1$.

7 (9). Дана функция $y=\dfrac{3-x^2}{x+2}$. Найдите наибольшее и наименьшее значения на отрезке $[-1{,}5;\ 1]$; найдите промежутки монотонности, экстремумы, нули функции. Постройте ее график.

8 (7). Используя свойства производной, докажите, что для всех $x\in[-2;\ 2]$ справедливо неравенство

$$x^3-3x^2+3x\leqslant 2.$$

9 (10). Найдите критические точки функции

$$y=\sin 3x+\frac{4}{3}\cos 3x-x+2.$$

10 (11). Найдите точку минимума функции

$$y=2x^3-3x^2-36x+10.$$

В ответе укажите ее ординату.

11 (8). Найдите критические точки функции

$$f(x)=\frac{7+x}{2}+\frac{1}{3}\sin 3x$$

на промежутке $[-\pi;\ 0]$.

12 (9). Парабола проходит через точки A, B, C, D, обозначенные в порядке следования. Точки A, C, D имеют координаты $A\ (0;\ 0)$, $C\ (1;\ 1)$, $D\ (2;\ 0)$. Найдите координаты точки B, при которых площадь четырехугольника $ABCD$ наибольшая.

13 (2). Найдите точки экстремума и интервалы монотонности функции

$$y=3x^4+2x^3-3x^2+2.$$

14 (3). Найдите наименьшее и наибольшее значения функции

$$f(x)=\frac{1}{\cos 2x-\cos 4x+3}.$$

При каких x они достигаются?

15 (3). Пусть x_1 и x_2 — действительные корни уравнения

$$x^2+(1-3a)x-1=0,\ a\in R.$$

а) Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(a)=\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1} \text{ на отрезке } [-1,\ 1].$$

б) Постройте график функции $f(a)$ на этом отрезке.

16 (3). Пусть $f(x)=(x^2-6)(3-2x)$. Определите

а) интервалы знакопостоянства функции и ее знаки,

б) промежутки монотонности и экстремумы функций.

в) Постройте эскиз графика функции $y=f(x)$ и выясните, сколько действительных корней имеет уравнение $f(x)=a$ в зависимости от a?

17 (3). Найдите наибольший объем правильной треугольной пирамиды, у которой апофема равна $4\sqrt{3}$.

18 (9). В арифметической прогрессии шестой член равен 3, разность прогрессии $d\geqslant 1/2$. При каком значении d произведение первого, четвертого и пятого членов будет наибольшим?

Геометрия

1 (10). Даны три вектора $\bar{a}\ (-1;\ 2)$, $\bar{b}\ (2;\ 1)$, $\bar{c}\ (2;\ 3)$. Разложите вектор $\bar{d}=\bar{a}-\bar{b}-\bar{c}$ по векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

2 (7). Известны координаты вершин треугольника: $A\ (0;\ 1)$, $B\ (\sqrt{3};\ 0)$ и $C\ (\sqrt{3};\ 2)$. Найдите стороны AB, AC, угол BAC, а также радиус и координаты центра окружности, описанной около треугольника ABC.

3 (5). Прямоугольный треугольник, площадь которого равна 6, а катеты относятся как $3:4$, вписан в окружность. Найдите диаметр этой окружности.

4 (11). Радиусы вписанной и описанной окружностей прямоугольного треугольника соответственно равны 2 и 5. Найдите катеты треугольника. (В ответе запишите сумму длин катетов.)

5 (8). Стороны прямоугольника относятся как $1:4$. На большей из них как на диаметре проведена окружность, отсекающая от противоположной стороны прямоугольника отрезок, равный a. Найдите часть площади, общую для прямоугольника и круга.

6 (7). В прямоугольнике $ABCD$ на стороне AD выбрана точка P, а на стороне DC — точки F и Q, после чего проведены отрезки AF и PQ. Известно, что $AD=12$, $CD=17$, $DF=5$; отношение периметров треугольников DPQ и DAF равно $5/12$, а отношение их площадей равно $25/144$. Найдите расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников DPQ и DAF.

7 (7). Из вершины A параллелограмма $ABCD$ с прямым углом CAD опущен перпендикуляр AK на сторону CD. Известно, что $AD=2AK=12$. Из точки M, лежащей на отрезке KC, опущены перпендикуляры MP и MQ на стороны AD и AB соответственно. В четырехугольник $MPAQ$ вписана окружность. Найдите ее радиус.

8 (8). Около круга радиусом 2 описана равнобедренная трапеция с площадью 20. Найдите стороны трапеции.

9 (11). Найдите площадь треугольника ABC, если $AB=27$, $AC=29$ и медиана $AD=26$.

10 (8). В равнобедренной трапеции длина средней линии равна 5, а диагонали взаимно перпендикулярны. Найдите площадь трапеции.

11 (3). Через точку M, лежащую внутри треугольника ABC, проведены прямые PQ, KN, EF, параллельные его сторонам AB, BC, AC. При этом образовались треугольники MEK, MQF, MPN с площадями S_1, S_2, S_3. Найдите площадь треугольника ABC.

12 (3). Докажите, что круги, построенные на сторонах выпуклого четырехугольника как на диаметрах, покрывают этот четырехугольник.

13 (12). Общая хорда двух окружностей служит для одной из них стороной вписанного квадрата, а для другой — стороной правильного вписанного шестиугольника. Найдите расстояние между

центрами окружностей, если радиус меньшей из них равен r.

14 (11). Вне окружности радиуса R взята точка A, из которой проведены две секущие: одна проходит через центр, а другая — на расстоянии $1/2\ R$ от центра. Найдите площадь части круга, заключенной между секущими.

15 (12). Две окружности, радиусы которых равны R и r, касаются внешним образом. Найдите расстояние от точки касания окружностей до их общей внешней касательной.

16 (3). Две окружности пересекаются в точках A и B. Через точку A проведены хорды AC и AD, касающиеся данных окружностей. Докажите, что

$$AC^2 \cdot BD = AD^2 \cdot BC.$$

17 (9). Площадь треугольника ABC равна 60. На стороне AC взята точка D так, что $AD:DC=2:3$. Длина перпендикуляра DE, опущенного на сторону BC, равна 9. Найдите BC.

18 (9). В равнобедренном треугольнике высоты, проведенные к основанию и боковой стороне, соответственно равны 10 и 12. Найдите длину основания.

19 (9). Равнобедренный треугольник с острым углом при вершине и углом α при основании вписан в окружность радиусом R. Найдите площадь этого треугольника.

20 (9). В трапецию с острым углом α и периметром p вписан круг. Найдите высоту трапеции, если один из ее углов равен $90°$.

21 (12). В треугольной пирамиде две грани — равносторонние треугольники со стороной a, лежащие в перпендикулярных плоскостях. Вычислите объем пирамиды.

22 (9). Найдите объем правильной треугольной пирамиды, у которой боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом α и удалено от середины противоположной стороны на расстояние l.

23 (9). Через ребро основания правильной четырехугольной пирамиды проведена плоскость, которая отсекает от противоположной грани треугольник, площадь которого равна 16. Найдите боковую поверхность пирамиды, отсеченной проведенной плоскостью от данной пирамиды, если боковая поверхность всей пирамиды равна 100.

24 (2). Дана правильная треугольная пирамида $SABC$ с вершиной S и стороной основания a. Боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под углом α. На сторонах основания AC и AB взяты точки E и F так, что $AE=\frac{1}{2}AC$, $FB=\frac{1}{2}AB$. Через точки E и F проведена плоскость под углом α к основанию пирамиды, пересекающая грань SBC. Найдите площадь сечения.

25 (2). Дана правильная четырехугольная пирамида $SABCD$ с вершиной S и стороной основания a. На сторонах основания AD и BC взяты точки E и F так, что $AE=\frac{1}{2}AD$, $FC=\frac{1}{2}BC$. Через точки E и F проведена плоскость параллельно грани SAB пирамиды. Найдите площадь получившегося сечения, если боковая грань пирамиды наклонена к плоскости основания под углом α.

26 (2). Дана правильная треугольная пирамида $SABC$, боковые грани которой наклонены к плоскости основания ABC под углом α. Из точки D, лежащей на высоте AE основания пирамиды и такой, что $AD:AE=1:3$, опущен перпендикуляр длиной p на боковое ребро AS. Найдите объем пирамиды.

27 (12). В правильной четырехугольной пирамиде боковое ребро равно b и образует с плоскостью основания угол α. Через диагональ основания параллельно боковому ребру проведена плоскость. Определите площадь сечения, а также объем треугольной пирамиды, отсекаемой секущей плоскостью.

28 (6). Основанием пирамиды $SABCD$ служит параллелограмм $ABCD$. Постройте сечение пирамиды, проходящее через вершину A и середины M и P ребер SB и SD. Определите, в каком отношении сечение делит ребро SC.

29 (6). Основанием усеченной пирамиды $ABCDA_1B_1C_1D_1$ служит трапеция $ABCD$ с основаниями AB и CD. Точки M и P лежат на боковых ребрах BB_1 и DD_1 соответственно. Известно, что $B_1M:MB=1:2$, $D_1P:PD=1:2$, $AB:A_1B_1=3:1$, $CD:AB=1:2$. Постройте сечение пирамиды, проходящее через вершину A и точки M и P. Определите, в каком отношении сечение делит ребро CC_1.

30 (11). Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна 13, а диагонали его боковых граней равны $4\sqrt{10}$ и $3\sqrt{17}$. Определите объем параллелепипеда.

31 (9). Докажите, что объем конуса равен произведению его боковой поверхности на $1/3$ расстояния от центра основания до образующей.

32 (9). В основание конуса вписан квадрат, сторона которого равна a. Плоскость, проходящая через вершину конуса и одну из сторон этого квадрата, образует в сечении с поверхностью конуса треугольник, угол при вершине кото-

рого равен α. Найдите объем конуса.

33 (10). В правильной треугольной пирамиде высота основания равна b, а боковые грани наклонены к плоскости основания под углом φ. Через вершину пирамиды и одну из вершин основания проведена плоскость, которая пересекает основание по прямой, образующей угол β с высотой основания. Найдите площадь сечения.

34 (8). Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник, у которого боковая сторона равна a, а угол при вершине α. Все боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом φ. Найдите объем пирамиды.

35 (9). Длина каждого ребра тетраэдра $SABC$ равна a. Найдите расстояние между ребром SA и ребром BC.

36 (9). Основанием пирамиды служит правильный треугольник со стороной, равной 6. Одно из боковых ребер перпендикулярно плоскости основания и равно 4. Найдите радиус шара, описанного около пирамиды.

37 (6). В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит треугольник ABC, у которого $AB=BC=a$, $\angle ABC=90°$. Ребро SB перпендикулярно плоскости основания и равно $2a$. Найдите радиус вписанной в пирамиду сферы.

38 (4). Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник, боковые стороны которого имеют длину b и составляют угол α. Боковые ребра пирамиды составляют с ее высотой угол β. Найдите объем пирамиды.

39 (9). В конус вписан шар. Радиус окружности, по которой касаются конус и шар, равен r. Найдите объем конуса, если угол между высотой и образующей α.

40 (8). Через две образующие конуса, угол между которыми равен α, проведена плоскость. Найдите отношение площади сечения к полной поверхности конуса, если образующая конуса составляет с плоскостью основания угол β.

41 (9). Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, длина ребра которого равна 8. На ребре AA_1 взята точка E так, что $AE=2$. Найдите объем пирамиды, вершиной которой является A_1, а основанием — сечение куба, проходящее через точки D, E и произвольную внутреннюю точку ребра BB_1.

Физика*)

Механика

1 (3). Тело в момент $t=0$ начинает двигаться вдоль оси X из состояния покоя. Ускорение тела задано графиком на рисунке 1. Найдите максимальное значение скорости тела.

2 (8). Найдите радиус вращающегося колеса, если линейная скорость точки, лежащей на ободе, в 2,5 раза больше линейной скорости точки, лежащей на $l=3$ см ближе к оси колеса.

3 (8). Поезд массой $m=2\cdot10^6$ кг, движущийся со скоростью $v=36$ км/ч, остановился, пройдя $l=400$ м с начала торможения. Определите силу торможения.

4 (3). Найдите зависимость от угла α величины силы трения F (рис. 2). Коэффициент трения μ, масса тела m.

5 (1). На горизонтальном асфальте стоят санки массой $m=50$ кг. С какой минимальной силой нужно тянуть за веревку, чтобы стронуть санки с места, если коэффициент трения скольжения полозьев по асфальту $\mu=0{,}70$?

6 (1). Поезд, проезжая мимо светофора со скоростью $v=36$ км/ч, начал тормозить. На каких расстояниях от светофора будет находиться поезд спустя время $t_1=1$ мин и $t_2=2$ мин после начала торможения? Масса поезда $m=2{,}5\cdot10^6$ кг, сила трения при торможении $F=2{,}5\cdot10^5$ Н.

7 (11). Шкив радиусом $R=20$ см приводится во вращение грузом, подвешенным на нерастяжимой невесомой нити, постепенно сматывающейся со шкива (рис. 3). В начальный момент груз был неподвижен, а затем стал опускаться с ускорением $a=2$ см/с^2. Определите угловую скорость шкива в момент времени, когда груз пройдет путь $s=100$ см.

*) Во всех задачах табличные данные считайте известными.

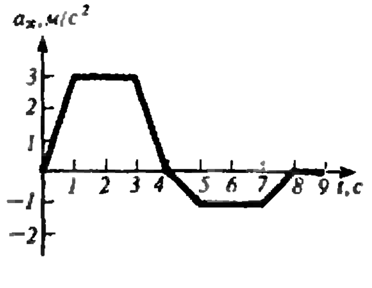


Рис. 1.

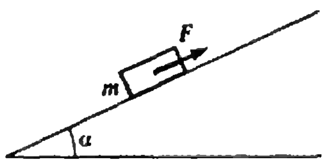


Рис. 2.

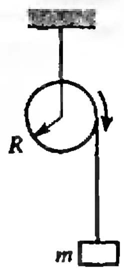


Рис. 3.

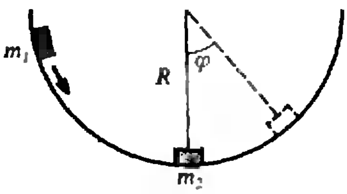


Рис. 4.

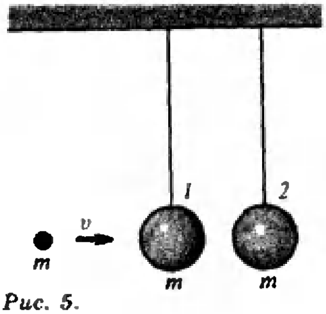


Рис. 5.

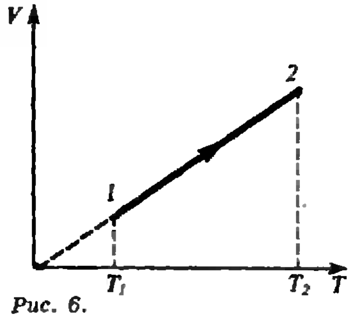


Рис. 6.

8 (5). Через невесомый блок перекинута веревка с грузами, массы которых m и $2m$. Пренебрегая трением, найдите давление блока на ось в тот момент, когда грузы еще неподвижны.

9 (1). К пружинным весам подвешен блок, через который перекинута нить. К концам нити привязаны грузы, массы которых относятся как 1 : 5. Сначала грузы неподвижны, а затем приходят в движение. Во сколько раз при этом изменяется показание весов? Массой блока и нити, а также трением можно пренебречь.

10 (1). Космический орбитальный комплекс «Мир» в автоматическом режиме двигался вокруг Земли практически по круговой орбите: максимальное удаление от поверхности Земли составляло $h_1 = 400$ км, минимальное — $h_2 = 372$ км. Период обращения был равен $T = 92{,}1$ мин. Оцените по этим данным ускорение свободного падения на поверхности нашей планеты, если ее радиус $R = 6370$ км.

11 (8). Мальчик, масса которого $m_1 = 50$ кг, бежит со скоростью $v_1 = 2$ м/с, догоняет тележку, движущуюся в том же направлении со скоростью $v_2 = 0{,}5$ м/с, и вскакивает на нее. С какой скоростью стала двигаться тележка с мальчиком? Масса тележки $m_2 = 100$ кг.

12 (10). С края гладкой полусферы соскальзывает небольшое тело массой m_1 и ударяется неупруго о тело массой m_2, лежащее на дне полусферы (рис. 4). Найдите угловую амплитуду качаний тел после удара.

13 (8). Камень массой $m = 0{,}04$ кг бросают вертикально вверх со скоростью $v_0 = 30$ м/с. Определите полную энергию камня в конце четвертой секунды. Сопротивлением воздуха пренебречь. Потенциальная энергия камня в начальный момент равна нулю.

14 (5). Какую работу надо совершить, чтобы увеличить скорость движения тела от $v_1 = 2$ м/с до $v_2 = 6$ м/с на пути $l = 10$ м? На всем пути действует постоянная сила трения $F_{тр} = 2$ Н, масса тела $m = 1$ кг.

15 (11). Резиновый мяч массой $m = 200$ г и объемом $V = 200$ см^3 погружают в воду на глубину $h = 3$ м и отпускают. На какую высоту, считая от поверхности воды, подпрыгнет мяч? Сопротивление воды и воздуха при движении не учитывать.

16 (10). Небольшое тело массой m лежит на вершине шероховатой полусферы радиусом R. Телу сообщили скорость v_0, и оно начало скользить. В момент, когда тело достигло точки, радиус-вектор которой составил угол α с вертикалью, произошел отрыв тела от сферы. Найдите работу по преодолению сил трения при движении по сфере. Найдите также изменение импульса тела за это же время.

17 (10). Пуля пробивает один из подвешенных грузиков и застревает в другом (рис. 5). Начальная скорость пули v, масса пули m равна массе каждого грузика. Найдите количество теплоты, выделившееся в первом грузике, если во втором выделилось количество теплоты Q.

Молекулярная физика. Тепловые явления

1 (8). Какой высоте ртутного столба (в метрах) соответствует давление $p = 5{,}44 \cdot 10^4$ Па?

2 (1). При нагревании абсолютная температура воздуха в камере мяча возросла на 10 %, а его объем — на 1 %. На сколько процентов увеличилось при этом давление воздуха в мяче?

3 (8). Из баллона выпустили $\Delta m = 7{,}5$ кг газа, при этом оставшийся газ оказался под давлением $p = 2{,}5 \cdot 10^6$ Па. Определите массу газа, который был в баллоне при давлении $p_0 = 10^7$ Па. Температура газа постоянна.

4 (1). Объем газа при нагревании изменяется по закону $V = \alpha\sqrt{T}$, где α — постоянная величина. Начертите график этого процесса в p, V координатах.

5 (10). Цилиндрический стакан опущен отверстием вниз в воду и плавает в ней так, что внутренняя поверхность дна находится на одном уровне с поверхностью

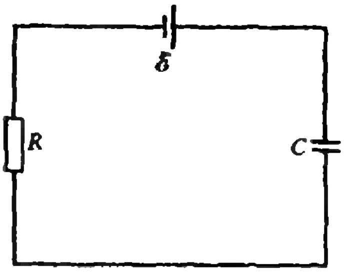


Рис. 7.

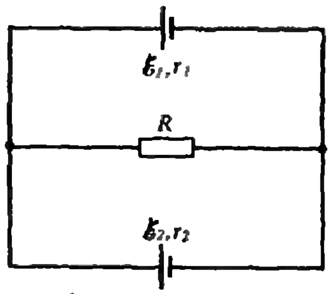


Рис. 8.

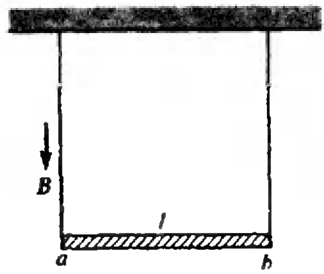


Рис. 9.

воды в сосуде. Масса стакана $m=400$ г, площадь дна стакана $S=10$ см^2. Давление воздуха в стакане перед погружением $p=760$ мм рт. ст. Какую часть стакана будет занимать воздух после погружения?

6 (5). Баллон, содержащий $m_1=1$ кг азота, во время испытаний взорвался при температуре $t_1=350$ °C. Какое количество водорода (в граммах) можно хранить в этом баллоне при $t_2=20$ °C, имея пятикратный запас прочности? Считать прочность баллона не зависящей от температуры.

7 (10). Сколько молекул воздуха выходит из комнаты объемом $V=120$ м^3 при повышении температуры от $t_1=15$ °C до $t_2=25$ °C? Атмосферное давление $p=10^5$ Па.

8 (1). Газ, состоящий из трехатомных молекул, находится в закрытом баллоне. Какая часть молекул газа продиссоциировала на атомы, если при увеличении абсолютной температуры газа в n раз его давление увеличилось в $m=1{,}2$ n раза? Объем баллона не изменяется.

9 (3). Какую работу совершит один моль идеального газа в процессе *1—2*, если его температура увеличилась от T_1 до T_2 (рис. 6)?

10 (1). Во сколько раз плотность сухого воздуха больше, чем плотность содержащегося в нем водяного пара, если относительная влажность воздуха $\varphi=90$ %, атмосферное давление $p=100$ кПа, а давление насыщенного водяного пара при температуре воздуха $p_н=2{,}2$ кПа?

11 (1). Из плохо закрытого крана капает вода. Определите массу вытекающей за сутки воды, если время между отрывом ближайших капель $\Delta t=1$ с. Диаметр шейки капли в момент ее отрыва считайте равным внутреннему диаметру трубы крана $d=1{,}8$ см.

12 (11). В воду массой $m_1=1$ кг при температуре $t_1=20$ °C поместили $m_2=200$ г льда при $t_2=-8$ °C. Какая установилась температура?

13 (5). Лед массой $m_1=20$ кг при температуре $t_1=-20$ °C опущен в воду, масса которой $m_2=20$ кг, а температура $t_2=70$ °C. Весь ли лед растает?

14 (10). Междугородный автобус прошел путь $l=30$ км за $t=1$ ч. Двигатель при этом развивал мощность $N=70$ кВт при КПД $\eta=25$ %. Сколько дизельного топлива, плотность которого $\rho=800$ кг/м^3, сэкономил водитель в рейсе, если норма расхода горючего $V_0=40$ л на $l_0=100$ км пути? Теплота сгорания дизельного топлива $q=42\cdot10^6$ Дж/кг.

Основы электродинамики

1 (8). Расстояние между двумя точечными зарядами $q_1=7\cdot10^{-9}$ Кл и $q_2=-14\cdot10^{-9}$ Кл равно $l=5$ см. Найдите напряженность электрического поля в точке, находящейся на расстоянии $a=3$ см от положительного заряда и $b=4$ см от отрицательного заряда.

2 (10). Воздушный плоский конденсатор с площадью пластин S и расстоянием между ними d опускают в вертикальном положении наполовину в жидкий диэлектрик с относительной диэлектрической проницаемостью ε. Какова емкость конденсатора после погружения? На какое расстояние надо раздвинуть пластины, не вынимая их из диэлектрика, чтобы емкость конденсатора стала такой, какой была до погружения?

3 (3). Конденсатор емкостью C заряжается от источника с ЭДС $\mathscr{E}$ (рис. 7). Какое количество теплоты выделяется при этом на резисторе?

4 (8). Через поперечное сечение проводника за каждые $t=10$ с проходит $n=2\cdot10^{20}$ свободных электронов. Определите силу тока в проводнике.

5 (1). Аккумулятор с внутренним сопротивлением $r=0{,}5$ Ом замыкают на резистор сопротивлением $R_1=500$ Ом. Для измерения силы тока в резисторе последовательно с ним включают амперметр, сопротивление которого $R_2=10$ Ом. Какую относительную погрешность допускают, если показание амперметра принимают за искомую величину?

6 (1). Источник тока с ЭДС $\mathscr{E}$ и внутренним сопротивлением r замкнут на внешнюю цепь. При изменении ее сопротивления сила тока в цепи также изменяется. Начертите график зависимости напряжения на клеммах источника от силы тока.

7 (10). В схеме, изображенной на рисунке 8, $\mathscr{E}_1=2$ В, $\mathscr{E}_2=1$ В, $r_1=r_2=r=1$ Ом. При каком сопротивлении R ток через источник с ЭДС $\mathscr{E}_2$ не пойдет?

8 (8). Две электрические лампочки, соединенные параллельно, подключены к источнику тока. Сопротивление первой лампочки $R_1=360$ Ом, второй — $R_2=240$ Ом. Во сколько раз мощность, выделяемая второй лампочкой, больше мощности, выделяемой первой?

9 (1). Проволочное кольцо подсоединено к аккумулятору. Контакты делят длину кольца в отношении $m:n$, при этом в кольце выделяется тепловая мощность P_1. Какая мощность будет выделяться в кольце, если контакты будут делить его длину в отношении $(m-1):(n+1)$? Внутренним сопротивлением аккумулятора можно пренебречь.

10 (5). Две лампы, соединенные последовательно, включены в городскую сеть с напряжением 220 В. Какова мощность каждой лампы в этом соединении, если на цоколе одной из них значится 50 Вт и 220 В, а на цоколе другой — 100 Вт и 220 В? Считать, что сопротивления ламп не зависят от потребляемой мощности.

11 (1). Электрический нагреватель подключен к двум последовательно соединенным одинаковым источникам тока. Покажите, что КПД нагревателя повысится, если его подключить только к одному источнику. Сопротивление нагревателя считайте постоянным.

12 (11). При силе тока $I_1=4$ А во внешней цепи батареи аккумуляторов выделяется мощность $P_1=18$ Вт, при силе тока $I_2=2$ А — соответственно $P_2=10$ Вт. Определите ЭДС батареи.

13 (1). Неоновая лампочка включена в электросеть. Лампочка зажигается и гаснет при напряжении на ее электродах в n раз меньшем, чем амплитудное значение напряжения в сети. Во сколько раз продолжительность одной вспышки лампочки больше промежутка между вспышками?

14 (8). Прямой проводник, по которому течет ток $I=50$ А, расположен в магнитном поле с индукцией $B=2$ Тл так, что образует угол $\alpha=30°$ с линиями индукции. Под действием магнитного поля проводник переместился на $d=0{,}5$ м, и при этом была совершена работа $A=10$ Дж. Определите длину проводника.

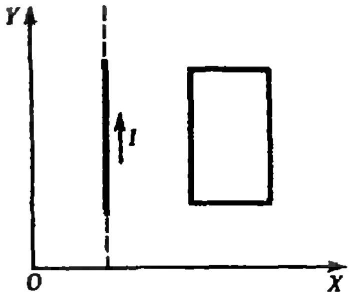


Рис. 10.

15 (10). Проводник ab длиной l и массой m подвешен на тонких невесомых проволочках в однородном магнитном поле (рис. 9). При прохождении по проводнику тока I он отклоняется так, что нити образуют с вертикалью угол α. Какова индукция магнитного поля? Магнитные линии перпендикулярны проводнику.

16 (3). В плоскости XY расположены длинный провод с током I и проводящая рамка (рис. 10). Возникает ли индукционный ток в рамке при ее перемещении а) вдоль OX; б) вдоль OY? Укажите направление индукционного тока.

17 (11). В однородном магнитном поле с индукцией $B=0{,}1$ Тл расположена плоская проволочная рамка, площадь которой $S=10^3$ см^2, а сопротивление $R=2$ Ом. Рамка расположена так, что ее плоскость перпендикулярна линиям индукции магнитного поля, и замкнута на гальванометр. При повороте рамки на некоторый угол через гальванометр протекает заряд $q=7{,}5\cdot10^{-3}$ Кл. На какой угол (в градусах) повернули рамку?

Оптика

1 (11). На плоскопараллельную прозрачную для света пластину толщиной $d=2$ см падает световой луч под углом $\alpha=60°$. Определите угол преломления этого луча, если при выходе из пластины луч смещается относительно первоначального направления на $l=1$ см.

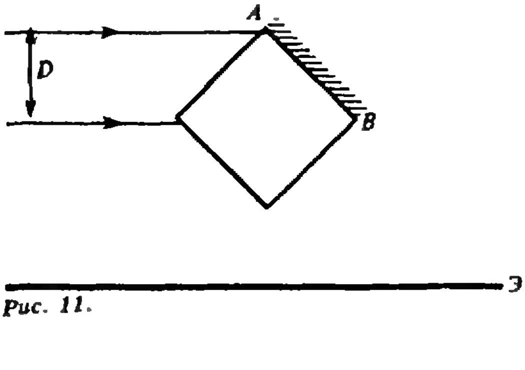


Рис. 11.

2 (10). Луч света выходит из скипидара в воздух. Предельный угол полного внутреннего отражения $\alpha_0=42°23'$. Определите скорость распространения света в скипидаре.

3 (1). Параллельный пучок света шириной $D=10$ мм падает на стеклянный кубик (рис. 11). Определите ширину светового пучка, который после прохождения через кубик, попадает на экран Э, если грань кубика AB посеребрена, а показатель преломления стекла $n=1{,}5$.

4 (1). Луч света, проходя через прямую правильную треугольную стеклянную призму, отклоняется от первоначального направления распространения на угол $\theta=60°$. Определите показатель преломления стекла, если внутри призмы луч распространяется параллельно одной из ее граней.

5 (1). У окна с двойными рамами стоит цветок. В окне видны два его изображения. На сколько удалены друг от друга эти изображения, если расстояние между стеклами рам $d=10$ см?

6 (8). На каком расстоянии от двояковыпуклой линзы, фокусное расстояние которой $F=40$ см, надо поместить предмет, чтобы его действительное изображение было таких же размеров, как предмет?

7 (1). Постройте действительное изображение предмета в собирающей линзе и докажите, что ее оптический центр и главные фокусы делят расстояние между предметом и его изображением на такие четыре части, для которых произведение длин крайних частей равно произведению длин средних.

8 (1). Переднее фокусное расстояние нормального ненапряженного глаза человека равно $F_1=17{,}1$ мм, заднее — $F_2=22{,}8$ мм. Чем обусловлено такое различие?

9 (1). При переходе света из одной прозрачной среды в другую изменяется его длина волны, а частота остается постоянной. Какие доказательства можно привести в пользу этих утверждений?

10 (1). Объектив фотоаппарата покрыт слоем прозрачного диэлектрика толщиной $h=0{,}525$ мкм. Обеспечит ли этот слой просветление объектива для зеленого света с длиной волны $\lambda=546$ нм, если показатель преломления диэлектрика $n=1{,}31$?

Квантовая физика

1 (10). В процессе фотоэффекта электроны, вырываемые с поверхности металла излучением частотой $\nu_1=2\cdot10^{15}$ Гц, полностью задерживаются тормозящим полем при разности потенциалов $U_1=7$ В, а при частоте $\nu_2=4\cdot10^{15}$ Гц — при разности потенциалов $U_2=15$ В. По этим данным вычислите постоянную Планка.

2 (10). Гелий-неоновый лазер, работающий в непрерывном режиме, дает излучение монохроматического света с длиной волны $\lambda=630$ нм, развивая мощность $P=40$ мВт. Сколько фотонов излучает лазер за одну секунду?

3 (11). Атомный реактор приводит в действие турбогенератор мощностью $P=2\cdot10^8$ Вт. Определите КПД турбогенератора, если в течение суток расход урана $^{235}_{92}U$ составляет $m=0{,}54$ кг, а при делении одного ядра этого элемента выделяется энергия, в среднем равная $w=3{,}2\times10^{-11}$ Дж.

Публикацию подготовили
А. Егоров, В. Тихомирова

(Начало см. на с. 60)

более чем за 14 ходов, причем последовательность кодов определена однозначно (с точностью до порядка).

В этом — разительное отличие «часов Рубика» от его «волшебного кубика», для которого не только нет речи о какой-либо единственности решения, но и вопрос о кратчайшем алгоритме так и остается открытым (см. статью «Математика волшебного кубика» в «Кванте» № 8, 1982 г.). Более того, с математической точки зрения «часы» вообще можно считать тривиальной головоломкой, поскольку ее решение сводится к линейным уравнениям. Вот к каким последствиям приводит простенькое свойство коммутативности!

И все же и в этой головоломке остается вопрос, над которым можно подумать. Если пустить в ход все 30 элементарных операций, то однозначность решения, конечно, нарушится, а многие операции можно будет сократить. *Верно ли, что и при таком расширенном арсенале ходов найдутся положения стрелок, до которых нельзя будет добраться быстрее, чем за 14 ходов?* Ждем ваших ответов.

В. Дубровский

„Квант" улыбается

Полуправда о полупроводниках

В настоящее время исследования в области полупроводников подвергаются столь интенсивному математическому обстрелу и столь богаты такими неудобоваримыми новыми понятиями как ловушки, дефекты, дырки, вакансии и проч., что за дырками уже почти не видно полупроводника. Поэтому давно настало время напомнить о фундаментальных представлениях и аксиомах, призванных облегчить жизнь пытливому и справедливо недоверчивому читателю, а заодно избавить его от знакомства с тоннами бессмысленных статей, которым все равно через пять лет суждено превратиться в гору макулатуры.

Первая Догма полупроводниковой веры звучит так:

ЧТО БЫ НИ ПРОИСХОДИЛО, ВО ВСЕМ СЛЕДУЕТ ВИНИТЬ ЭЛЕКТРОН (за его отрицательный заряд, его отрицательный моральный облик и т. п.).

Металлы являются исключением в том смысле, что они хорошо проводят электрический ток. Это объясняется тем, что в них имеются отбившиеся от рук электроны, и любое дурное влияние, как например, электрическое поле, заставляет их пускаться во все тяжкие.

Если кусок полупроводника (т. е. не совсем неметалла) подвесить на красной нитке в центре холла конференц-зала, и если присутствующие будут достаточно горячо спорить на эту тему, то в итоге, возможно, удастся определить знак носителей заряда в полупроводнике. Это носит название «эффекта холла».

Неоднократное применение эффекта холла позволило определить, что в одних полупроводниках переносчиками заряда являются электроны, в то время как в других заряд переносят положительные персонажи, которыми электроны, естественно, быть не могут по определению (см. Догму).

В итоге несчастные полупроводники были разбиты на две категории:

1) Полупроводники n-типа (n — нормальный), в которых электроны безобразничают вполне прилично.

2) Полупроводники p-типа (p — распущенный), в которых электроны безобразничают совсем уж неприлично.

Физики-твердотельщики никак не соглашались с тем, что положительными носителями могут быть положительные электроны (позитроны), поскольку последние уже были открыты физиками-ядерщиками и в этой идее не было бы ничего нового. Поэтому после долгих бессонных ночей, проведенных за ДЫРчащим оборудованием, родилась очень новая и очень оригинальная идея — положительные носители — это ДЫРКИ!

Если электрон срывается с места и полный сомнительных намерений направляется в Зону проводимости, то все так радуются, что освобожденную им вакансию называют «положительной дыркой». Когда вакансию заполняет другой электрон, считается приличным (особенно в присутствии дам) говорить, что дырка «рекомбинировала».

В любом куске твердого тела есть масса всяких странностей, таких как фононы, экситоны, ловушки и т. д. Будучи одурманены фотонами и фононами, электроны с легкостью попадают в расставленные им ловушки. Это вызывает некоторую путаницу, так как воспитанные люди не говорят, что электрону потом все-таки удается выбраться из ловушки, а предпочитают уклончиво бормотать что-то о попадании в ловушку дырки. Однако эта путаница легко устранима, если твердо усвоить фундаментальные представления и не обращать внимания на причуды воспитания.

Следует упомянуть также Табу полупроводников. Из приведенного выше хитроумного определения следует, что дырки имеют отрицательную массу. Это означает, что если в полупроводник напихать достаточное количество дырок, он должен воспарить как воздушный шарик. Легко заметить, что в беседах физики обычно уклоняются от обсуждения этой темы. Тому имеется две причины.

а) Они находятся в не очень удобном положении, так как эта идея совсем не оригинальна. Ее давным-давно высказали химики, придерживавшиеся флогистонной теории (правда, сомнительно, чтобы физики знали химию).

б) Эта тематика засекречена, поскольку именно такой метод борьбы с силой тяжести втихую воплощается в ракетах, служащих для уничтожения ракет, служащих для уничтожения ракет.

Автор надеется, что изложением основных фактов о полупроводниках он поможет читателю вести на данную тему самые ученые беседы без риска быть разоблаченным. При этом нужно лишь следовать двум простым правилам (одной Догме и одному Табу) и не забывать строить серьезную физиономию.

Желаем удачи!

М. А. Вайнор. Факультет полумер и весов Политехнического института высших исследований.

(Selected Papers of The Journal of Irreproducible Results, 1981, перевод О. Мацарской)

Ответы, указания, решения

Работа и изменение энергии идеального газа

1. $A=\dfrac{R(T_2-T_1)^2}{2\sqrt{T_2\,T_1}}$.

2. $A_{12}=\dfrac{9}{17}-\left(\dfrac{4}{3}RT_1+Q\right)=625$ Дж.

3. $Q_{отд}=33/16\ RT_1$. Указание. На участке $1-2$ температура уменьшается от максимальной до T_2.

4. $\eta=\eta_1+\eta_2-\eta_1\eta_2$.

Задачи вступительных экзаменов в различные вузы в 1990 году

Математика

Алгебра

1. 27. 2. 13. 3. 164 см, 200 см. 4. 40/3 кг. 5. 2,5 кг. 6. 20 ч, 30 ч. 7. 12 ч. 8. 48 и 20. 9. 3 ч. 10. 40 км/ч. 11. 20 км/ч. 12. 12 р. Указание. Пусть x, y и z — стоимость 1 кг первого, второго и третьего вида конфет. По условию, $8x+2y+3z=100$, $5x+3y+2z=80$. Чтобы найти $A=1{,}1x+0{,}1y+0{,}04z$, достаточно заметить, что $10A=2(8x+2y+3z)-(5x+3y+2z)$. 13. 44. 14. $\pm\sqrt{2}/4$; $\pm\sqrt{2}/2$. 15. -15. 16. 41 100. Указание. Числа, делящиеся на 4 и дающие при делении на 3 в остатке 2, имеют вид $12k+8$ (k — целое число). 17. 4, 6, 9 и 6, 6, 6. Указание. Пусть a_1, a_2, a_3 — стороны треугольника. Тогда $a_1a_3=a_2^2$, $a_2^3=216$, т. е. $a_2=6$, $a_1a_3=36$. 18. 68. 19. 74835; 74430. 20. а) 0; б) 7/6; в) 9; г) $-3/2$; д) 2; е) $-1/2$. 22. а) 3; б) 1/2; в) 1; г) $a/(b-a)$; д) $3x$; е) $1/(1+\sqrt{a}+a)$; ж) $\sqrt{ax}/(a-2x)$, 1; з) $4a/b$, 32; и) $(16+c^3)/(16-c^3)$; к) 1; л) $8\left(1-\dfrac{1}{2}\sin 2\alpha\right)/3$; 2; м) $4\operatorname{ctg}^4\alpha$. 23. а) 2/9; б) 5; в) 5; г) 20; д) 16/9; е) 0; ж) $-1/2$; з) 3; и) 1; к) 0; л) 1; м) -1; н) 0; о) 0; п) 2; р) -5; с) 2; т) 0; 2; у) 16, 1/4; ф) 5; х) 4; ц) 1/2; ч) $-1/4$; ш) 0. 24*). а) $\dfrac{\pi}{2}(4k-1)$; б) $(-1)^k\dfrac{\pi}{6}+\pi k$, $-\dfrac{\pi}{2}+2\pi k$; в) $(-1)^{k+1}\dfrac{\pi}{4}+\pi k$; г) $\pi(2k+1)/4$; д) $\pi(3k\pm1)/3$; е) $\pi(2k+1)$, $\pi(4k+1)/2$; ж) $\pi(4k+1)/4$; з) $\pi(2k+1)$, $\pm\arccos\dfrac{1-\sqrt{17}}{4}+2\pi k$; и) $k\pi$, $k\neq 4m$; $2\pi(6k\pm1)/3$; к) $\pi k/2$, $\pi(6k\pm1)/6$; л) $\pi(6k\pm1)/6$; м) $\pi(4k-1)/24$; н) $\pi k/2$; о) $\pi(4k-1)/4$, $k\pi$; п) $\pi k/2$, $\pi(6k\pm1)/6$; р) $\pi(4k+1)/4$. Указание. Приведите уравнение к виду $(\sin x+\cos x)^3=4\sin x(\sin^2x+\cos^2x)$, после чего разделите левую и правую части на $\cos^3x$ ($\cos x\neq0$!) и выполните замену $t=\operatorname{tg}x$; с) $\pi(4k+1)/2$; т) $\pi(2k+1)/2$, $\pi(4k+1)/4$; у) $\pi(4k+1)/4$, $2k\pi$; ф) $\pi(4k-1)/4$; х) $2\pi(3k+1)/27$, $2\pi(3k+1)/9$; ц) $\pi(2k+1)$; ч) $\pi(3k+(-1)^k)/3$; ш) $\pi(4k+1)/4$; щ) $(2k+1)^2/64$, $k\geqslant0$; $((12k-1)/18)^2$, $k>0$; $((12k+7)/18)^2$, $k\geqslant0$; ь) $(-\pi/2+2k\pi;\ \pi/2+\pi l)$. 25. а) $\pi/6$, $7\pi/6$; б) 0; $2\pi/3$, π; в) $\pi(6k+1)/3$. 26. а) $(-\infty;\ -1)\cup\{3\}$; б) $[-2;\ 1]$; в) $(-\infty;\ -1]\cup(8;\ +\infty)$; г) $(-\infty;\ 1]\cup(5;\ +\infty)$; д) $(-\infty;\ 0]$; е) $[-1/2;\ 3-2\sqrt{3})$; ж) $(-\infty;\ 0)\cup[1;\ +\infty)$; з) $[2;\ \infty)$; и) $(-\infty;\ 1/2)\cup(3;\ +\infty)$; к) $(-1;\ 7)$; л) $(-\infty;\ -2)\cup(5/8;\ +\infty)$; м) $(-2;\ -1)$; н) $(1;\ \log_2 3]$; о) $[\log_2(5/2);\ 2)$; п) $(1;\ 3)\cup(3;\ +\infty)$; р) $[3;\ +\infty]$; с) $(2,\ 4)$; т) $(-1;\ 2/3)\cup(3/2;\ 2)\cup(2;\ 3)$; у) $(-1;\ 0)\cup(4;\ 5)$; ф) $(0;\ 1]$. 27. а) $(3^{4/33};\ 81)$; б) $[-1;\ 5]$; в) $(-\infty;\ -\sqrt{2})\cup(\sqrt{2};\ +\infty)$. 28. $(-1/2;\ 1)\cup(1;\ 2)$. 29. $\pi(2k+1)/3$, $k=6l+1$, $l<0$. 30. -1. 31. 1; 2; $-22/3$. 32. -4. 33. 4/5. 34. $a=-4$; $x=-1$. 35. $(-\infty;\ -3)\cup(1;\ 3/2]$. 36. $(7/4;\ 2]\cup[4;\ +\infty)$. 37. $(-\infty;\ -1/2)$. 38. $[1/3;\ +\infty)$. 39. $(-3;\ 0)$. 40. $a\in(2/3;\ 2)$; $(-a/2;\ 1)$. 41. $(-1;\ 1)$. 42. а) $(-2;\ 1)$; б) $(-1;\ 2)$, $(1/2;\ 11/4)$; в) $(\log_2(184/7);\ \log_2(135/7))$; г) $(-1;\ \pm\sqrt{3})$; д) $(6;\ 2)$; е) $(25;\ \pm4)$; ж) $(64;\ 1/4)$; з) $(1/81;\ -3)$, $(27,\ 4)$. 43. $x^2+6x+2=0$. 45. а) $(4;\ -3)$. Указание. Уравнение приводится к виду $(x+y-1)^2+(y+3)^2=0$; b) $(1;\ 1)$.

Анализ

1. 1/4. 2. 2. 3. $-3/2$. 4. 4. 5. 2. 6. $y=3ex+3e$. 7. Промежутки убывания: $(-\infty;\ -3)$ и $(-1;\ +\infty)$. Промежутки возрастания: $(-3;\ -2)$ и $(-2;\ -1)$. $\max\limits_{-1,5\leqslant x\leqslant1} f(x)=f(-1)=2$. 9. $-\dfrac{1}{3}\operatorname{arctg}\dfrac{4}{3}\pm\dfrac{1}{3}\arccos\dfrac{1}{5}+\dfrac{2k\pi}{3}$. 10. -71. 11. $-8\pi/9$, $-4\pi/9$, $-2\pi/9$. 12. $(1/2;\ 3/4)$. 13. $x=-1$ и $x=1/2$ — точки минимума, $x=0$ — точка максимума. Промежутки возрастания: $(-1;\ 0)$ и $(1/2;\ +\infty)$. Промежутки убывания: $(-\infty;\ -1)$ и $(0;\ 1/2)$. 14. $\min f(x)=f\left(\pm\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{1}{4}+k\pi\right)=\dfrac{8}{33}$, $\max f(x)=f\left(\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right)=1$ Указание. Выразите знаменатель дроби через $t=\cos 2x$ и исследуйте полученную функцию от t на отрезке $[-1;\ 1]$. 15. $\max\limits_{-1\leqslant a\leqslant1} f(a)=f(1/3)=-2$, $\min\limits_{-1\leqslant a\leqslant1} f(a)=f(-1)=-15$. 16. а) $f(x)>0$ при $x\in(-\infty;\ -\sqrt{6})\cup(3/2;\ \sqrt{6})$; $f(x)<0$ при $x\in(-\sqrt{6};\ 3/2)\cup(\sqrt{6};\ +\infty)$. б) Убывает на промежутках $(-\infty;\ -1)$ и $(2;\ +\infty)$, возрастает на промежутке $(-1;\ 2)$, в) 1 корень при $a<-25$ и $a>2$; 2 корня при $a=2$ и $a=-25$; 3 корня при $-25<a<2$. 17. $144\sqrt{2}$. 18. 2,4.

Геометрия

1. $\bar{d}=(\bar{a}-12\bar{b})/5$. 2. $AB=AC=BC=2$. 3. 5. 4. 14. 5. $a^2(2\pi+3\sqrt{3})/36$. 6. 91/24, 119/24. Указание. Докажите, что $PQ\parallel AF$. 7. $3-\sqrt{3}$. Указание. MA — биссектриса угла BAD. 8. 2, 5, 5, 8. 9. 270. 10. 25. 11. $(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3})^2$. 12. Указание. Если какая-то точка не покрыта, то все углы, под которыми из этой точки видны стороны, меньше $\pi/2$. 13. $r(\sqrt{2}+\sqrt{6})/2$. 14. $\left(\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)R^2$. 15. $2Rr/(R+r)$. 16. Указание. Докажите, что треугольники ABC и ABD подобны. 17. 8. 18. 15. 19. $2R^2\sin^2\alpha\sin 2\alpha$. 20. $(p\sin\alpha)/2(1+\sin\alpha)$. 21. $a^3/8$. 22. $2l^3\sqrt{3}/(27\sin^2\alpha\cos\alpha)$. 23. 81. 24. $3a^2\sqrt{3}/(64\cos\alpha)$. 25. $3a^2/(16\cos\alpha)$. 26. $p^3\sqrt{3}(4+\operatorname{tg}^2\alpha)^{3/2}/\operatorname{tg}^2\alpha$. 27. $(b^2\cos\alpha)/2$, $(b^3\sin\alpha\cos^2\alpha)/6$. 28. 1:2. 29. 2:9. 30. 144.

*) Здесь и далее предполагается, что k, l, $m\in\mathbf{Z}$.

32. $\pi a^3\sqrt{\cos\alpha}/(12\sin\frac{\alpha}{2})$. 33. $b^3\sqrt{\text{tg}^2\varphi+4\sin^2\beta}/(6\cos\beta)$. 34. $(a^3\sin\frac{\alpha}{2}\,\text{tg}\,\varphi)/6$. 35. $a/\sqrt{2}$. 36. 4. 37. $a/4$. 38. $(b^3\sin\frac{\alpha}{2}\text{ctg}\,\beta)/6$. 39. $\pi r^3\text{ctg}^3(45°-\frac{\alpha}{2})/(3\sin\alpha\cos^2\alpha)$. 40. $\sin\alpha/(4\pi\cos\beta\cos^2\frac{\beta}{2})$.
41. 128.

Физика

Механика

1. $v_{max}=9$ м/с.
2. $R=5/8l=5$ см.
3. $F=mv^2/(2l)=2{,}5\cdot10^5$ Н.
4. $F=mg\sin\alpha$ при $\text{tg}\,\alpha<\mu$;
$F=\mu mg\cos\alpha$ при $\text{tg}\,\alpha>\mu$.
5. $F_{min}=\mu mg/\sqrt{1+\mu^2}=286$ Н.
6. $l_1=vt_1-Ft_1^2/(2m)=420$ м;
$l_2=mv^2/(2F)=500$ м.
7. $\omega=\sqrt{2as}/R=1$ с$^{-1}$.
8. $F=3mg$.
9. $F_1/F_2=3$.
10. $g=4\pi^2(R+(h_1+h_2)/2)^3/(T^2R^2)=9{,}8$ м/с^2.
11. $v=(m_1v_1+m_2v_2)/(m_1+m_2)=1$ м/с.
12. $\varphi_m=\arccos(1-m_1^2/(m_1+m_2)^2)$.
13. $E=mv_0^2/2=18$ Дж.
14. $A=m(v_2^2-v_1^2)/2+F_{тр}l=36$ Дж.
15. $H=h(\rho V/m-1)=0{,}8$ м.
16. $A_{тр}=0{,}5m(v_0^2+2gR(1-1{,}5\cos\alpha))$;
$\Delta P=m\sqrt{v_0^2+gR\cos\alpha-2v_0\sqrt{gR\cos^3\alpha}}$.
17. $Q_1=2v\sqrt{Qm}-4Q$.

Молекулярная физика. Тепловые явления

1. $h=p/(\rho g)=0{,}4$ м.
2. $\frac{\Delta p}{p}=\frac{\Delta T/T-\Delta V/V}{1+\Delta V/V}100\%\approx9\%$.
3. $m_0=\Delta m p_0/(p_0-p)=10$ кг.
4. См. рис. 1.
5. $\frac{V_в}{V_{ст}}=\frac{1}{1+mg/(pS)}=0{,}96$.
6. $m_2=m_1T_1M_2/(5T_2M_1)=30$ г.
7. $N=N_ApV(T_2-T_1)/(RT_1T_2)=10^{26}$.
8. $\alpha=(m-n)/(2n)=0{,}1$.
9. $A=R(T_2-T_1)$.
10. $\frac{\rho_в}{\rho_п}=\left(\frac{p\cdot100\%}{p_н\varphi}-1\right)\frac{M_в}{M_п}=80$.
11. $m=\pi d\sigma t/(g\Delta t)=36$ кг (здесь $t=1$ сутки).
12. $t=2{,}9$ °C.
13. Нет, не весь.

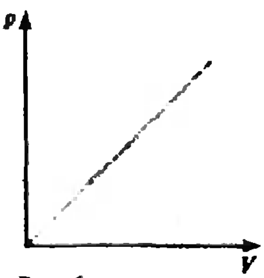


Рис. 1.

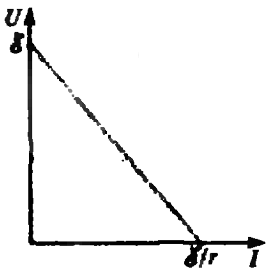


Рис. 2.

14. $\Delta V=\frac{V_0l}{l_0}-\frac{Nt\cdot100\%}{\rho\eta q}=2$ л.

Основы электродинамики

1. $E=\sqrt{\left(\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0a^2}\right)^2+\left(\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0b^2}\right)^2}=$
$=10{,}5\cdot10^4$ В/м.
2. $C=\varepsilon_0S(1+\varepsilon)/(2d)$; $x=(\varepsilon-1)d/2$.
3. $Q=C\mathscr{E}^2/2$.
4. $I=en/t=3{,}2$ А.
5. $\delta=R_2/(r+R_1+R_2)=0{,}02$ (или 2 %).
6. См. рис. 2.
7. $R=r\mathscr{E}_2/(\mathscr{E}_1-\mathscr{E}_2)=1$ Ом.
8. $P_2/P_1=R_1/R_2=1{,}5$.
9. $P_2=P_1mn/((m-1)(n+1))$.
10. $P_1=22{,}2$ Вт; $P_2=11{,}1$ Вт.
11. $\eta_2=\frac{R}{R+r}>\eta_1=\frac{R}{R+2r}$.
12. $\mathscr{E}=\frac{P_2/I_2^2-P_1/I_1^2}{1/I_2-1/I_1}=5{,}5$ В.
13. $\frac{t_1}{t_2}=\frac{\pi}{2\arcsin(1/n)}-1$.
14. $l=A/(BId\sin\alpha)=0{,}4$ м.
15. $B=mg\,\text{tg}\,\alpha/(Il)$.
16. а) Индукционный ток в рамке возникает, он направлен по часовой стрелке; б) ток не возникает.
17. $\varphi=\arccos(1-qR/(BS))=120°$.

Оптика

1. $\beta=\text{arctg}(\text{tg}\,\alpha-l/(d\cos\alpha))=36°$.
2. $v=c\sin\alpha_0=2\cdot10^8$ м/с (здесь c — скорость света в вакууме).
3. $d=D\sin\alpha/\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}=5{,}3$ мм.
4. $n=\sin\frac{\theta+\varphi}{2}/\sin\frac{\varphi}{2}=1{,}7$ (здесь $\varphi=60°$).
5. $x=2d=20$ см.
6. $d=2F=0{,}8$ м.
8. Различием показателей преломления среды (воздуха) перед глазом и среды (студенистой жидкости) внутри глаза.
9. Например, изменение радиусов и густоты интерференционных полос в опыте с кольцами Ньютона при заполнении воздушного зазора какой-нибудь жидкостью. Или постоянство энергии квантов монохроматического пучка света в различных прозрачных средах.
10. Да, обеспечит, так как оптическая разность хода интерферирующих лучей содержит нечетное число полуволн света.

Квантовая физика

1. $h=e(U_2-U_1)/(\nu_2-\nu_1)=6{,}4\cdot10^{-34}$ Дж·с.
2. $n=P\lambda/(hc)=1{,}26\cdot10^{17}$ с$^{-1}$.
3. $\eta=P\tau M\cdot100\%/(wmN_A)=39\%$ (здесь $\tau=1$ сутки).

«Квант» для младших школьников
(см. «Квант» № 5)

1. Заметим, что после переливания в большой бочке оказалось в полтора раза больше молока,

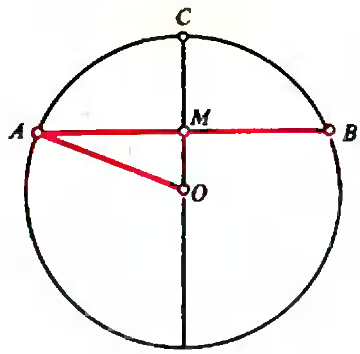


Рис. 3.

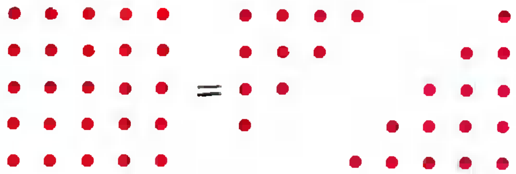


Рис. 4.

чем в маленькой. Если обозначим количество перелитого молока через x, то получим уравнение $1{,}5\,(21+x)=(39+x)$. Отсюда $x=3$, а бочки вмещают 24 и 72 литра.

2. То, что бо́льший отрезок диаметра больше половины хорды следует из того, что он больше радиуса, а половина хорды — меньше радиуса. Второе утверждение доказывается чуть сложнее:
$CM+MO=AO<AM+MO$, отсюда $CM<AM$ (см. рис. 3).

3. Камень вытеснил объем воды, равный своему объему, но плотность камня больше плотности воды, следовательно, вес стакана увеличится.

4. $468532+468532=937064$.

5. См. рис. 4.

Конкурс «Математика 6—8»
(см. «Квант», № 3)

19. Треугольник ABM будет равнобедренным в одном из трех случаев: $AB=BM$, $AB=AM$ и $AM=BM$. В первом случае точка M лежит на окружности радиуса AB с центром в точке B, во втором — на окружности того же радиуса с центром в точке A, в третьем — на срединном перпендикуляре к отрезку AB. Эти линии изображены на рисунке 5 красным пунктиром. Черным пунктиром изображены на этом рисунке линии, являющиеся геометрическим местом точек M, для которых треугольники ACM являются равнобедренными. Искомым геометрическим местом точек M будут точки, принадлежащие одновременно красным и черным линиям. Это точки M_1, M_2, M_3 и M_4, а также все точки окружности радиуса AB с центром в точке A, за исключением точек B, C, N_1 и N_2, поскольку, поместив точку M в любую из этих точек, получим один из треугольников ABM или ACM вырожденным.

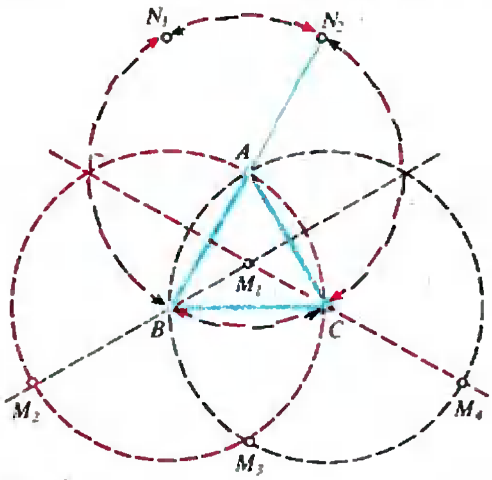


Рис. 5.

20. Пусть выигрыш Андрея равен x. Заметим, что тогда в первой кучке лежит не меньше одной спички, во второй — не меньше чем $1+x$, в третьей не меньше чем $1+2x$, в четвертой не меньше чем $1+3x$, в пятой

Анкета 6—91

Благодарим всех читателей, приславших свои ответы на вопросы анкеты и пожелания. Нам очень важно знать Ваше мнение о журнале — его содержании и оформлении.

Мы продолжаем публикацию нашей анкеты (для новых читателей: она появляется в журнале раз в три месяца).

А теперь, дорогой читатель, ответьте, пожалуйста, на вопросы анкеты (на те, на которые Вы хотите и можете ответить), вырежьте анкету и пришлите в редакцию; на конверте напишите «Анкета 6—91».

1. Класс, в котором Вы учитесь: ____

Ваша профессия (если Вы работаете): ____

Круг интересов: физика, математика, астрономия, космонавтика, информатика (подчеркните).

2. Какие разделы журнала для Вас наиболее интересны? ____

не меньше чем $1+4x$ и в шестой не меньше чем $1+5x$. Следовательно, общее количество спичек (200) не меньше чем $6+15x$. Отсюда получаем, что $x \leqslant 13-1/15$. Значит наибольшее значение для x равно 12.

21. Пусть ладья, стоящая на 1-й горизонтали, стоит на вертикали с номером a_1, ладья, стоящая на 2-й горизонтали, стоит на вертикали с номером a_2 и т. д., ладья, стоящая на 8-й горизонтали, стоит на вертикали с номером a_8. Сумма произведений номеров горизонталей и вертикалей равна $1a_1+2a_2+ \ldots +8a_8$, а для центрально-симметричного расположения ладей такая сумма равна $8(9-a_1)+7(9-a_2)+\ldots+1(9-a_8)$. Разность этих чисел равна $-9(8+7+\ldots+1)+9(a_1+a_2+\ldots+a_8)$. Но сумма номеров вертикалей равна сумме целых чисел от 1 до 8. Следовательно, эта разность равна нулю.

Анкета 6—91

3. Какие статьи и задачи из номеров 4—6 (номер укажите) Вам понравились? ____

Вы использовали при подготовке к уроку? ____

4. Решаете ли Вы задачи из «Задачника «Кванта»? ____

5. Какая обложка из номеров 4—6 Вам больше всего понравилась? ____

6. Ваши вопросы и пожелания: ____

Номер подготовили:
А. Виленкин, Л. Винюкова, А. Егоров, Л. Кардасевич, А. Котова, А. Савин, В. Тихомирова, А. Черноуцан

Номер оформили
Е. Барк, С. Иванов, Д. Крымов, С. Лухин, Э. Назаров, И. Смирнова, Л. Тишков, П. Чернуский, В. Юдин

Редактор отдела художественного оформления
С. Иванов

Художественный редактор Т. Макарова

Зав. редакцией С. Давыдова

Корректор В. Сорокина

103006, Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант», тел. 250-33 54

Сдано в набор 25.03.91. Подписано к печати 16.05.91.

Формат 70×100/16. Бумага офс. № 1.
Гарнитура школьная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 6,5. Усл. кр.-отт. 27,3. Уч. изд. л. 7,86
Тираж 93 961 экз. Заказ 494 Цена 70 коп.

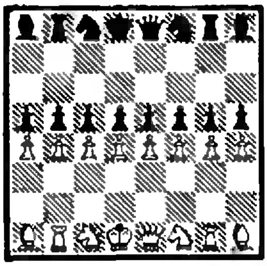
Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
Государственного комитета СССР
по печати
142300, г. Чехов Московской обл.

Шахматная страничка

ЕДИНСТВЕННЫЕ РАССТАНОВКИ

Мартин Гарднер — классик современной занимательной математики, автор более двух десятков книг на эту тему. Многие из них переведены на русский язык. Любопытно, что почти в каждом издании М. Гарднера содержится немало математических задач, игр и головоломок с шахматным сюжетом. Это относится и к двум последним книгам, изданным недавно у нас: «Крестики-нолики» («Мир», 1988) и «Путешествие во времени» («Мир», 1990). Сейчас мы обсудим несколько задач из этих книг.

Начнем со следующей несложной задачки. Представьте себе, что вы с приятелем закончили игру и хотите расставить фигуры для новой партии. Какое максимальное число перемещений фигур понадобится для этого?

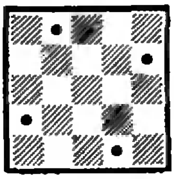


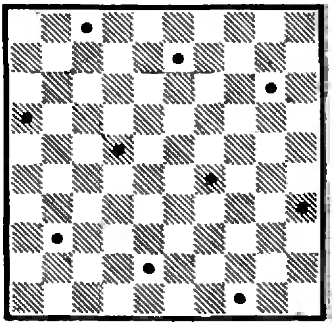
В этой рекордной ситуации понадобится целых 38 перестановок. Рассмотрим сначала одни белые фигуры. Поменять местами короля и ферзя можно только за три «хода». Ферзь становится на любое свободное поле, затем король располагается на родном поле e1 и ферзь на d1. Нетрудно видеть, что за четыре «хода» попадают на свои места фигуры в левом нижнем углу и за столько же в правом нижнем углу. Наконец, за восемь «ходов» на месте оказываются пешки. Итого, 19 «ходов» белых фигур, столько же черных.

Амазонкой называют фигуру, которая ходит одновременно как ферзь и конь. Рассмотрим одну головоломку с участием амазонок.

Как известно, на доске $n\times n$ при любом $n>3$ можно расставить n не угрожающих друг другу ферзей. А сколько можно расставить «мирных» амазонок?

Х. Лонг обнаружил, что на доске 5×5 умещаются только четыре амазонки, а на доске 10×10 — десять, причем решения в обоих случаях единственные (с точностью до поворотов доски и ее зеркальных отражений). На рисунках амазонки изображены точками.

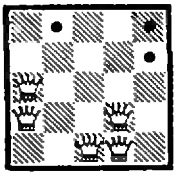




В общем случае эту задачу, кажется, никто не решал. Речь идет не только о нахождении необходимых расстановок, но и о подсчете их числа для различных значений n. Кстати, перебрав все 92 решения классической задачи о восьми ферзях, нетрудно убедиться, что ни одно из них не годится для амазонок, т. е. восемь этих сказочных фигур расставить на доске так, чтобы они не угрожали друг другу, невозможно.

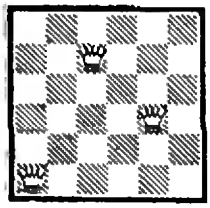
В книге «Крестики-нолики» целая глава посвящена шахматам, она так и называется «Шахматные задания». Большинство задач и головоломок, содержащихся в ней, читатель может найти и в моей книге «Шахматы и математика» («Наука», 1983), но есть у Гарднера и несколько новых для меня находок. Они связаны с расстановками ферзей на досках $n\times n$, обладающих теми или иными свойствами.

Например, такой вопрос: как расставить n ферзей на доске $n\times n$ так, чтобы на ней осталось максимальное число полей, свободных от угрозы ферзей? При $n=1$, 2 или 3 таких полей вообще нет. При $n=4$ может быть только одно поле, а при $n=5$ — три, и рекордная позиция опять единственная — (преобразования доски не в счет).

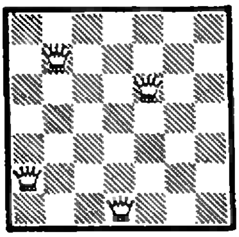


Существует гипотеза, согласно которой максимальное число полей, не атакованных ферзями, при $n=6$, 7, 8, 9, 10, 11 и 12, равно соответственно 5, 7, 11, 16, 22, 27 и 36. Найти рекордные расстановки (или побить рекорд) предоставляется читателю.

В заключение два интересных факта. Оказывается, разместить три ферзя на доске 6×6 так, чтобы все свободные поля оказались под угрозой, можно единственным образом (преобразование доски не в счет).



А на доске 7×7 можно расположить четыре ферзя так, чтобы все свободные поля были под угрозой и ни одна пара ферзей не атаковала друг друга.



И опять это расположение — единственное.

Е. Гик

70 коп.
Индекс 70465

Две головоломки, показанные на наших рисунках, относятся к комбинаторным головоломкам с переменной ориентацией.

В первой из них 4 прозрачные пластинки нужно сложить в стопку так, чтобы отдельные квадратики на пластинках закрыли весь большой квадрат. Поворачивая пластинки на 90° или 180°, можно получить $4^3=64$ варианта их взаимного расположения (с точностью до поворотов всей стопки). Если пластинки разрешить еще и переворачивать, то количество существенно различных вариантов умножается на $2^3=8$, но сложность решения увеличивается еще больше. Ведь в этом случае вы не знаете, можно ли вообще найти решение для данной стопки.

Во второй головоломке требуется закрыть оранжевыми дольками все секторы круга. Число вариантов их взаимного расположения равно $12^3=1728$, но только один из них дает правильное решение.

Пластинки можно вырезать из толстой прозрачной пленки и наклеить на нее кусочки цветной бумаги.

Д. К.